Chapitre 01 - Mesures et incertitudes.

# Correction des travaux dirigés

*Exercice 01 : mesurage d'une résistance*

1. L'incertitude-type est de **type A** car l'expérimentateur observe la variabilité de la mesure.
2. Résultat du mesurage pour la première valeur (via la calculatrice) :

$$\begin{cases} R_{mes} = 534\ \Omega \\ u(R) = 3{,}4\ \Omega \end{cases}$$

On obtient donc :

$$R_{mes} = 534{,}0\ \Omega;\ u(R) = 3{,}4\ \Omega$$

En écriture scientifique :

$$\boldsymbol{R_{mes} = 5{,}340 \times 10^2\ \Omega;\ u(R) = 0{,}034 \times 10^2\ \ \Omega}$$

3. Résultat du mesurage pour l'ensemble des valeurs mesurées :

$$\begin{cases} R_{exp} = \bar{R} = 531\ \Omega \\ u(\bar{R}) = \dfrac{u(R)}{\sqrt{N}} = \dfrac{3{,}4}{\sqrt{5}} = 1{,}6\ \Omega \end{cases}$$

On obtient donc :

$$\boldsymbol{R_{exp} = 531{,}0\ \Omega\ ; u(\bar{R}) = 1{,}6\ \Omega}$$

En écriture scientifique :

$$\boldsymbol{R_{exp} = 5{,}310 \times 10^2\ \Omega;\ u(R) = 0{,}016 \times 10^2\ \ \Omega}$$

4. L'incertitude-type relative pour l'ensemble des valeurs mesurée est :

$$\frac{u(\bar{R})}{R_{exp}} = \frac{1{,}6}{531{,}0} = \mathbf{0{,}3}\%$$

5. La valeur de l'incertitude élargie à 95% est $\Delta R = \pm\ 2 \times u(\bar{R}) = \pm\ \mathbf{3{,}2\ \Omega}$.

L'encadrement expérimental est :

$$[\mathbf{527{,}8\ \Omega};\ \mathbf{534{,}2\ \Omega}]$$

*Exercice 02 : mesurage d'une tension « continue »*

1. L'incertitude-type est de **type B** car l'expérimentateur n'observe pas la variabilité de la mesure.
2. Le calibre du voltmètre utilisé par l'expérimentateur est le **calibre $\boldsymbol{3V}$** car la valeur mesurée a pour dernière décimale le mV.
3. Valeur de la demi-étendue $a$ pour le modèle 97R :

$$a = 0{,}3\,\% + 2dgt$$
$$a = 0{,}3\% \times 1{,}985 + 2 \times 0{,}001 = \mathbf{0{,}0080\ V}$$

4. Résultat du mesurage :

$$\begin{cases} U_{exp} = U_{mes} = 1{,}985V \\ u(U) = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{0{,}0080}{\sqrt{3}} = 0{,}0047\ V \end{cases}$$

On obtient donc :

$$\boldsymbol{U_{exp} = 1{,}9850\ V\ ;\ u(U) = 0{,}0047\ V}$$

5. Le taux d'humidité et la température de l'air peuvent engendrer la variabilité de cette valeur mesurée.

6. Résultat du deuxième mesurage :

$$\begin{cases} U_{\exp 2} = U_{mes\,2} = 1{,}977V \\ u(U_2) = \dfrac{0{,}5\% \times 1{,}977 + 2 \times 0{,}001}{\sqrt{3}} = 0{,}0069\ V \end{cases}$$

On obtient donc :

$$\boldsymbol{U_{exp\,2} = 1{,}9770\ V\ ;\ u(U_2) = 0{,}0069\ V}$$

7. On calcule l'écart normalisé :

$$E_N = \frac{|U_{\exp 1} - U_{\exp 2}|}{\sqrt{u(U_1)^2 + u(U_2)^2}} = \frac{|1{,}9850 - 1{,}9770|}{\sqrt{0{,}0047^2 + 0{,}0069^2}} = 0{,}96$$

Les deux mesurages sont compatibles car l'écart normalisé $E_N < 2$ .

*<u>Exercice 03 : résistances en série</u>*

1. Résultat de ces deux mesurages, en notation scientifique :

$$R_{1,exp} = R_{1,mes} = 298{,}5\ \Omega$$

$$u(R_1) = \frac{1{,}0\% \times 298{,}5 + 4 \times 0{,}1}{\sqrt{3}} = 2{,}0\ \Omega$$

On obtient donc :

$$R_{1,exp} = 298{,}5\ \Omega\ ;\ u(R_1) = 2{,}0\ \Omega$$

En notation scientifique :

$$\boldsymbol{R_{1,exp} = 2,985 \times 10^2\ \Omega\ ;\ u(R_1) = 0,020 \times 10^2\ \Omega}$$

De même :

$$R_{2,exp} = R_{2,mes} = 2{,}551\ k\Omega$$

$$u(R_2) = \frac{0{,}8\% \times 2{,}551 + 2 \times 0{,}001}{\sqrt{3}} = 0{,}013\ k\Omega$$

On obtient donc, en notation scientifique :

$$R_{2,exp} = 2{,}551\ k\Omega\ ;\ u(R_2) = 0{,}013\ k\Omega$$

$$\boldsymbol{R_{2,exp} = 2,551\ \times 10^3\ \Omega\ ;\ u(R_2) = 0,013\ \times 10^3 \Omega}$$

2. Résultat du mesurage de la résistance équivalente $R_{éq}$ :

$$R_{éq,exp} = R_{1,exp} + R_{2,exp} = 2{,}985 \times 10^2 + 2{,}551\ \times 10^3 = 2{,}850\ \times 10^3\ \Omega$$

$$u(R_{éq}) = \sqrt{\left(u(R_1)\right)^2 + \left(u(R_2)\right)^2} = \sqrt{(2{,}0)^2 + (13)^2} = 14\ \Omega$$

On obtient donc, en notation scientifique :

$$\boldsymbol{R_{éq,exp} = 2,850\ \times 10^3\ \Omega;\ u(R_{éq}) = 0,014\ \times 10^3\ \Omega}$$

*<u>Exercice 04 : mesurage de la vitesse de propagation des ondes ultrasonores</u>*

1. Le mesurage de la distance $D$ donne :

$$\begin{cases} D_{exp} = D_{mes} = 40{,}0\ cm \\ u(D) = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}05}{\sqrt{3}} = 0{,}029\ cm \end{cases}$$

On obtient donc :

$$D_{exp} = 40{,}00\ cm\ ;\ u(D) = 0{,}029\ cm$$

En écriture scientifique, le mesurage aboutit à :

$$D_{exp} = 40{,}000 \times 10^{-2} m\ ;\ u(D) = 0{,}029 \times 10^{-2}\ m$$
$$\boldsymbol{D_{exp} = 4{,}0000 \times 10^{-1} m\ ;\ u(D) = 0{,}0029 \times 10^{-1}\ m}$$

2. Son incertitude-type relative est :

$$\frac{u(D)}{D_{exp}} = \frac{0{,}029}{40{,}000} = \mathbf{0{,}073}\%$$

3. Le mesurage de la durée $\Delta t$ donne :

$$\begin{cases} \Delta t_{\ exp} = \Delta t_{\ mes} = 1{,}18\ ms \\ u(\Delta t) = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}01}{\sqrt{3}} = 0{,}0058\ ms \end{cases}$$

On obtient donc :

$$\Delta t_{exp} = 1{,}1800\ ms\ ;\ u(\Delta t) = 0{,}0058\ ms$$

En écriture scientifique, le mesurage aboutit à :

$$\boldsymbol{\Delta t_{exp} = 1{,}1800\ \times 10^{-3} s\ ;\ u(\Delta t) = 0{,}0058\ \times 10^{-3} s}$$

4. Son incertitude-type relative est :

$$\frac{u(\Delta t)}{\Delta t_{exp}} = \frac{0{,}0058}{1{,}1800} = \mathbf{0{,}5}\%$$

5. On sait que :

$$v_{exp} = \frac{D_{exp}}{\Delta t_{exp}} = \frac{4{,}0000 \times 10^{-1}}{1{,}1800\ \times 10^{-3}} = \mathbf{339\ m/s}$$

$$u(v) = |v_{exp}| \times \sqrt{\left(\frac{u(\Delta t)}{\Delta t_{exp}}\right)^2 + \left(\frac{u(D)}{D_{exp}}\right)^2} = 339 \times \sqrt{(0{,}5\%)^2 + (0{,}073\%)^2} = \mathbf{1{,}8\ m/s}$$

On obtient donc :

$$v_{exp} = 339{,}0\ m/s\ ;\ u(v) = 1{,}8\ m/s$$

En écriture scientifique, le mesurage aboutit à :

$$\boldsymbol{v_{exp} = 3,390 \times 10^2 m/s}\ ;\ \boldsymbol{u(v) = 0,018 \times 10^2\ m/s}$$

6. On calcule la valeur de référence :

$$v_{ref} = 331{,}4 + 0{,}607 \times \theta = 331{,}4 + 0{,}607 \times 20 = 343{,}5\ m/s$$

Puis on détermine le z-score :

$$z = \frac{|v_{exp} - v_{ref}|}{u(v)} = \frac{|339{,}0 - 343{,}5|}{1{,}8} = 2{,}5$$

Le mesurage n'est pas compatible avec la valeur de référence car le z-score est supérieur à 2.

7. Plusieurs possibilités :
   - Reproduire la mesure pour la distance $D_{exp} = 40{,}0\ cm$ plusieurs fois
   - Faire varier la distance $D$ et faire une série de $N$ mesures du couple $(D; \Delta t)$

*<u>Exercice 05 : mesurage d'une valeur de capacité</u>*

1. Les 10 valeurs mesurées pour la capacité $C$ donnent :

$$C = \frac{\tau}{R}$$

Pour la première valeur mesurée :

$$C = \frac{151 \times 10^{-3}}{100} = 151 \times 10^{-5}\ F = 1{,}51\ mF$$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,51 $mF$ | 1,20 $mF$ | 1,19 $mF$ | 1,15 $mF$ | 1,09 $mF$ | 1,09 $mF$ | 1,06 $mF$ | 1,05 $mF$ | 1,05 $mF$ | 1,04 $mF$ |

2. Résultat du mesurage de la capacité $C$ (à la calculatrice) :

$$C_{exp} = \bar{C} = 1{,}14\ mF \text{ et } u(C) = 0{,}15\ mF$$

Donc :

$$u(\bar{C}) = \frac{u(C)}{\sqrt{N}} = \frac{0{,}15}{\sqrt{10}} = 0{,}048\ m\mathrm{F}$$

On obtient :

$$\boldsymbol{C_{exp} = 1{,}140\ mF; u(\bar{C}) = 0{,}048\ m\mathrm{F}}$$

3. On détermine le z-score :

$$z = \frac{|C_{exp} - C_{ref}|}{u(\bar{C})} = \frac{|1{,}140 - 1{,}00|}{0{,}048} = \mathbf{3}$$

Le mesurage **n'est pas compatible** avec la valeur de référence car le z-score est supérieur à 2.

4. Le mesurage n'est **ni juste** car le z-score est supérieur à 2, **ni fidèle** car l'incertitude-type relative est importante $\frac{0{,}048}{1{,}14} = 4{,}2\%$.

5. Les 10 nouvelles valeurs mesurées pour la capacité $C$ donnent :

$$C = \frac{\tau}{R + r}$$

Pour la première valeur mesurée :

$$C = \frac{151 \times 10^{-3}}{100 + 50} = 1{,}01\ mF$$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,01 $mF$ | 0,960$mF$ | 1,02 $mF$ | 1,02 $mF$ | 0,995 $mF$ | 1,00$mF$ | 0,988 $mF$ | 0,992 $mF$ | 0,999 $mF$ | 0,991 $mF$ |

6. Résultat du nouveau mesurage de la capacité $C$ :

$$C_{exp} = \bar{C} = 0{,}998\ mF \text{ et } u(C) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\ \sum_{i=1}^{i=N}(C_i - \bar{C})^2} = 0{,}018 mF$$

Donc :

$$u(\bar{C}) = \frac{u(C)}{\sqrt{N}} = \frac{0{,}018}{\sqrt{10}} = 0{,}0057\ m\mathrm{F}$$

On obtient :

$$\boldsymbol{C_{exp} = 0,9980\ mF ; u(\overline{C}) = 0,0057\ m\mathrm{F}}$$

7. On détermine le z-score :

$$z = \frac{\left|C_{exp} - C_{ref}\right|}{u(\bar{C})} = \frac{|0{,}9980 - 1{,}00|}{0{,}0057} = \mathbf{0,36}$$

Le mesurage est **compatible** avec la valeur de référence car le z-score est **inférieure à 2.**

8. Le mesurage est **juste** car le z-score est inférieur à 2, **et fidèle** car l'incertitude-type relative est faible $\frac{0{,}0057}{0{,}9980} = 0{,}6\%$.