

Chapitre 01

Mesures et incertitudes.

Capacités exigibles :

- Savoir identifier les grandeurs mesurées par un système électronique et préciser leurs unités.
- Exploiter un document expliquant l'origine de la variation de la mesure.
- Savoir déterminer l'incertitude-type sur la mesure d'une grandeur.
- Déterminer le domaine de validité d'une mesure d'après les caractéristiques des appareils utilisés.
- Savoir définir la justesse et la fidélité d'une mesure.
- Savoir définir et calculer une incertitude absolue ou relative.
- Définir l'incertitude-type comme la demi-étendue où la valeur vraie de la grandeur mesurée doit probablement être, avec un niveau de confiance précisé.
- Définir les incertitudes de type A et de type B.
- Évaluer l'incertitude-type (type A) grâce à une série de mesures automatisée d'une grandeur physique.
- Évaluer l'incertitude-type, d'une mesure unique (type B) à partir d'informations sur l'appareil utilisé et de formules fournies.
- Maîtriser l'usage des chiffres significatifs et l'écriture scientifique/ingénieur pour écrire un résultat avec l'incertitude-type associée et l'unité correspondante.
- Arrondir un résultat d'une mesure en cohérence avec l'incertitude-type associée.
- Comparer une mesure associée à une incertitude-type aux contraintes d'un cahier des charges à respecter.

Un processus permettant de déterminer la valeur expérimentale d'une grandeur ne permet jamais d'obtenir la « valeur vraie » de cette grandeur. Dans ce chapitre, on cherche à comprendre comment déterminer la valeur expérimentale d'une grandeur ainsi que l'incertitude-type qui lui est associée.

I. Variabilité et incertitude :A. Définitions et vocabulaire :❖ **Définition : le mesurage**

En Physique, on appelle « mesurage » un processus expérimental qui conduit à attribuer un ensemble de valeurs numériques à une grandeur notée x , accompagné d'une unité appropriée.

❖ **Définition : valeur mesurée**

La valeur appelée « valeur mesurée » est la valeur que l'on obtient par mesurage.

Dans ce chapitre, elle est notée x_{mes} .

❖ **Définition : valeur expérimentale**

La valeur appelée « valeur expérimentale » est la valeur que l'on attribue à la grandeur, après mesurage unique ou mesurage multiple (ou par calcul).

Dans ce chapitre, elle est notée x_{exp} .

❖ Définition : valeur de référence

La valeur appelée « valeur de référence » d'une grandeur peut être :

- une valeur expérimentale à laquelle on accorde plus de confiance (obtenue via un mesurage plus rigoureux),
- une valeur dérivée d'un modèle,
- une valeur issue d'une fiche technique, d'un manuel d'utilisation etc.

Dans ce chapitre, elle est notée x_{ref} .



Vocabulaire à bannir à partir de cet instant de votre vie :

« Précision » est à remplacer par « exactitude » (« précis » est à remplacer par « exact »)

« valeur vraie » est à remplacer par « valeur de référence »

« Erreur » est à remplacer par « incertitude »

B. La variabilité de la mesure :

Un mesurage est un processus généralement complexe qui entremêle de très nombreux processus. Cette complexité se traduit systématiquement par une variabilité de la mesure, qui implique que la répétition de l'ensemble de la mesure conduit généralement à une valeur mesurée sensiblement différente de la première. Cette variabilité est naturelle et fait intrinsèquement partie de la mesure. Il ne faut pas chercher à la faire disparaître, bien au contraire, elle renferme généralement une grande richesse d'information sur le processus physique.

Cette variabilité peut provenir de nombreux aspects, dont les principaux sont les suivants :

- Le choix de la méthode de mesure : mesurer la longueur d'une table avec un double décimètre ou avec un mètre ruban ne conduit pas à la même valeur mesurée.
- Aux instruments de mesure : mesurer une tension avec deux voltmètres semblant identiques amène parfois à une valeur mesurée de tension légèrement différente.
- Aux variations de l'environnement : la température des systèmes électriques augmentant au cours de leur utilisation, cela peut engendrer la variation de la valeur mesurée.
- A l'expérimentateur : c'est en général la principale cause de variabilité de la mesure. Par ses gestes, ses choix et sa technique, cette personne introduit une variabilité importante. Il est donc totalement naturel que deux personnes réalisant la même expérience, dans les mêmes conditions, avec le même matériel, trouvent des valeurs différentes.

Remarque :

En acquérant chaque année des nouvelles connaissances et de nouvelles compétences, un·e étudiant·e peut donc patiemment réussir à faire diminuer son impact personnel sur la variabilité d'une mesure.



Vidéo pour comprendre les notions abordées dans la suite de ce chapitre
« Mesurage et incertitude-type »



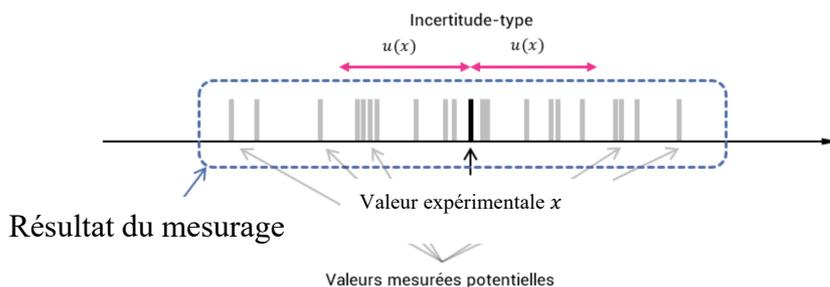
C. Que représente l'incertitude-type ?

❖ Définition de l'incertitude-type :

L'incertitude-type est l'estimation de la dispersion des valeurs mesurées raisonnablement attribuables à la valeur de la grandeur.

L'incertitude-type quantifie la variabilité des valeurs potentiellement mesurées, de la grandeur x . Par définition, **l'incertitude-type** correspond à **l'écart-type** de la distribution des valeurs potentiellement mesurées.

Elle est notée $u(x)$: "u" pour "uncertainty", en anglais.



La figure ci-contre représente une distribution de valeurs potentiellement mesurées ainsi que l'incertitude-type. On constate qu'en moyenne deux valeurs (mesurées potentielles) prises au hasard sont séparées de quelques $u(x)$.

Toutefois, on constate aussi que quelques valeurs (mesurées potentielles) sont très éloignées des autres. Il ne s'agit pas de valeurs aberrantes, mais de valeurs dans des domaines peu fréquents ou peu probables, mais tout de même possibles.

Propriété :

L'incertitude-type permet de quantifier la variabilité d'un mesurage. Ainsi, deux valeurs mesurées x_1 et x_2 issues du même processus sont séparées en moyenne de quelques $u(x)$ par construction de l'incertitude-type en tant qu'écart-type.

D. Apprendre à rédiger le résultat d'un mesurage :

❖ Nombres de chiffres significatifs pour $u(x)$:

L'incertitude-type résulte d'une évaluation : on n'est jamais certain de sa valeur. Pour rappeler que l'incertitude-type est elle-même incertaine, on limite en général son nombre de chiffres significatifs à **deux**.

❖ Comment écrire le résultat d'un mesurage ?

On écrit un résultat de mesurage en suivant la méthode suivante :

1. Arrondir $u(x)$ avec deux chiffres significatifs **au maximum toujours par excès**
2. Écrire la valeur expérimentale suivi de l'incertitude-type (dans le même multiple ou sous-multiple de l'unité) sous la forme :

$$x_{exp} = \dots ; u(x) = \dots$$

3. Adapter le nombre de chiffres significatifs de x_{exp} pour que la valeur de x_{exp} ait le même nombre de décimales que $u(x)$

Lorsque l'incertitude-type est précisée, le **nombre de chiffres significatifs de la valeur expérimentale correspondante n'a plus de sens propre**. On le choisit de manière à faciliter la lecture, en s'arrangeant pour que le dernier chiffre de la valeur expérimentale ait la même position que le dernier chiffre de l'incertitude-type.

Pour résumer :

Un mesurage de la valeur d'une résistance avec évaluation de l'incertitude-type peut s'écrire ainsi :

$$R_{exp} = 22,527 \times 10^3 \Omega; \quad u(R) = 0,035 \times 10^3 \Omega$$

Étape 2 : Même unité / même multiple

Étape 1 : 2 CS au max arrondi par excès

Étape 3 : le dernier chiffre de de la valeur exp doit avoir la même position que le dernier chiffre de l'incertitude type

❖ Comment écrire le résultat d'un mesurage en notation scientifique ?

Lorsque la question exige de rédiger le résultat du mesurage en notation scientifique, il faut ajouter les étapes suivantes à votre rédaction :

4. Mettre **uniquement la valeur expérimentale** en notation scientifique, en décalant la virgule et en adaptant avec une puissance de dix.
5. Décaler ensuite du même nombre de rangs la virgule de l'incertitude type tout en adaptant avec la puissance de dix que précédemment.

Sur l'exemple précédent, cela donne :

$$R_{exp} = 22,527 \times 10^3 \Omega; \quad u(R) = 0,035 \times 10^3 \Omega$$

Étape 4 : on décale d'un rang vers la gauche la virgule de la valeur expérimentale pour l'obtenir en notation scientifique

$$R_{exp} = 2,2527 \times 10^4 \Omega; \quad u(R) = 0,035 \times 10^3 \Omega$$

Étape 5 : on décale ensuite du même nombre de rang la virgule de l'incertitude-type

$$R_{exp} = 2,2527 \times 10^4 \Omega; \quad u(R) = 0,0035 \times 10^4 \Omega$$

E. Les deux types d'incertitude-type :

Premier cas : l'expérimentateur observe la variabilité de la mesure lors du processus expérimental

Le mesurage abouti à une **série de N mesures** indépendantes : l'évaluation des incertitudes-type se fait par des **méthodes statistiques**. On dit que l'incertitude-type est de **type A**.

Deuxième cas : l'expérimentateur n'observe pas la variabilité de la mesure lors du processus expérimental

Le mesurage abouti à une **mesure unique** réalisée avec un instrument de mesure, : l'évaluation des incertitudes-type se fait par une **approche probabiliste**. On dit que l'incertitude-type est de **type B**.



II. Estimation de la valeur expérimentale et de l'incertitude-type associée :

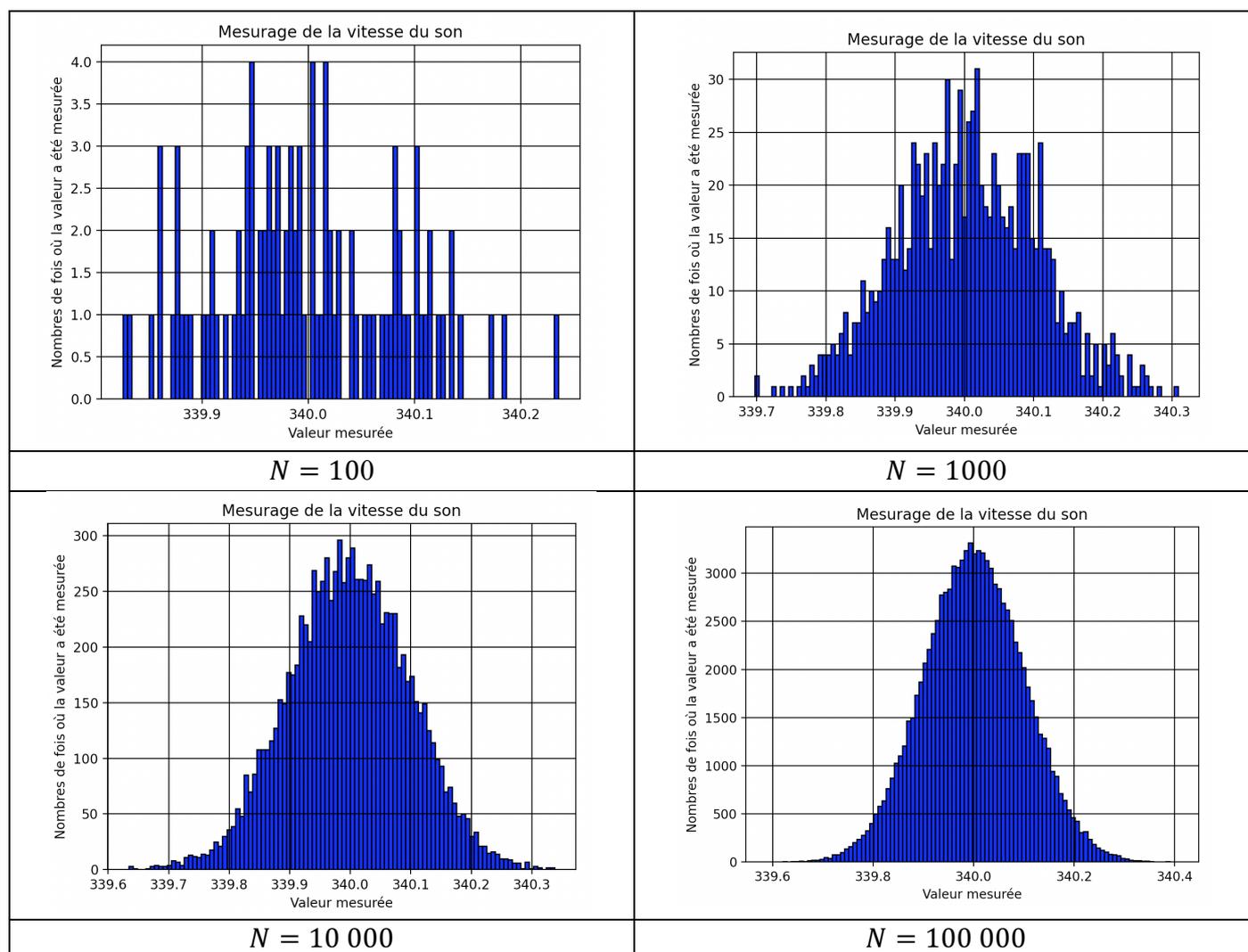
A. Mesurage avec variabilité observée – type A (approche statistique) :

Lorsque la variabilité des mesures est accessible à l'expérimentateur, il convient de répéter un grand nombre de fois le mesurage.

L'expérimentateur dispose alors d'un ensemble de N valeurs mesurées, notées x_i , avec i allant de 1 à N .

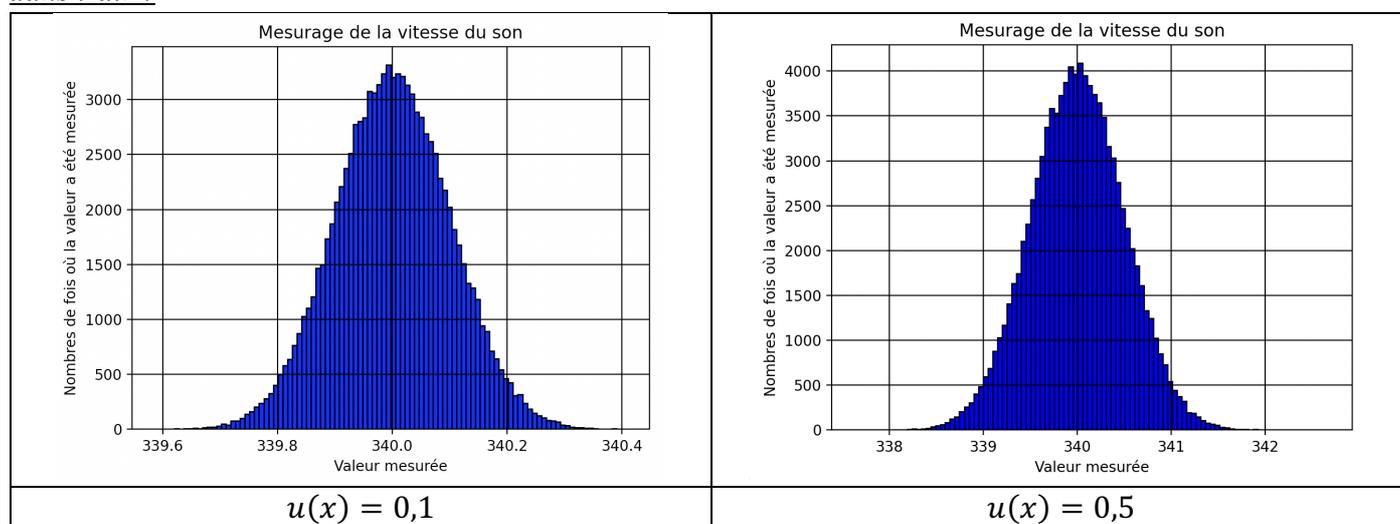
Résultats (par simulation) de N mesures pour le mesurage de la vitesse de propagation du son dans l'air :

Imaginons que nous soyons capables de reproduire ce mesurage un très grand nombre de fois. Voici à quoi pourraient ressembler les courbes pour 100 mesures, 1000 mesures etc.



La courbe obtenue pour $N = 100\,000$ est celle qui s'approche le plus d'une distribution lisse, appelée « distribution gaussienne ». Cette courbe « en cloche » est caractéristique de très nombreux mesurages.

Résultats (par simulation) de $N = 100\,000$ mesures pour le mesurage de la vitesse de propagation du son dans l'air :



$u(x)$ (c'est-à-dire l'écart-type pour l'une des mesures) est liée

❖ **Comment déterminer $u(x)$ l'incertitude-type associée à l'une des valeurs mesurées ?**

L'incertitude-type associée à une observation unique exprime la variabilité potentielle de cette observation. Elle quantifie les fluctuations typiques d'une observation à l'autre.

On réalise N fois le même protocole pour obtenir l'ensemble des valeurs mesurées $\{x_i\}$.

On définit la moyenne arithmétique de l'ensemble, notée \bar{x} ainsi :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} x_i \text{ ou encore } \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

L'incertitude-type $u(x)$ pour **une des mesures** de cette série est évaluée en calculant son écart-type :

$$u(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{i=N} (x_i - \bar{x})^2}$$



Il faut savoir calculer une moyenne et un écart-type rapidement avec votre calculatrice (voir notice d'utilisation) : en Physique, nous avons besoin de l'écart-type de l'échantillon, noté très souvent "s" sur vos calculatrices.

Sur les calculatrices :

L'écart-type d'un échantillon a pour symbole :

- S_x pour les modèles TI
- « $\sigma n-1$ » pour les modèles Casio
- « Ecart type echantillon » pour les Numworks

Visionner la vidéo correspondant à votre calculatrice :

CASIO	Texas Instrument	Numworks
 Niveau facile	 Niveau facile	 Niveau facile
 Niveau plus complet	 Niveau plus complet	

❖ **Incertitude-type associée à l'ensemble des valeurs mesurées : résultat du mesurage**

L'expérimentateur dispose de plusieurs valeurs mesurées : il estime la variabilité en étudiant leur dispersion. Pour l'évaluer, on utilise **l'écart-type de l'ensemble** des valeur mesurées.

Dans le cas d'incertitude-type de type A, le résultat du mesurage correspond à la détermination de la valeur expérimentale x_{exp} et de l'incertitude-type pour **l'ensemble des valeurs mesurées**.

Le résultat du mesurage se détermine à l'aide des relations suivantes :

La valeur expérimentale correspond à la moyenne des valeurs mesurées et l'incertitude-type de la valeur expérimentale correspond à l'incertitude-type de la moyenne des valeurs mesurées.

On ne garde qu'au maximum deux chiffres significatifs pour $u(\bar{x})$ et on arrondit la valeur obtenue par excès.

B. Mesurage sans variabilité observée – type B (approche probabiliste) :

Certaines expériences n'ont pas de variabilité observée :

- en reproduisant la mesure, on retrouve systématiquement le même résultat. C'est par exemple le cas lorsque l'on mesure naïvement la taille d'un objet avec la même règle graduée. Logiquement, reproduire la mesure n'apporte pas d'information. Cela signifie juste qu'à l'échelle de cette expérience, avec l'appareil de mesure choisi, elle n'est pas visible.
- en effectuant une unique mesure (il n'est pas parfois matériellement possible ou souhaité de reproduire la mesure).

Cette absence de variabilité observée n'implique pas une absence de variabilité. Il faut donc estimer théoriquement la variabilité de la valeur mesurée sans l'observer.

❖ Valeur expérimentale et incertitude-type de type B :

Dans le cas d'un mesurage sans variabilité observée, l'unique valeur mesurée accessible à l'expérimentateur est considérée comme la valeur expérimentale :

Pour estimer l'incertitude-type $u(x)$ de cette unique valeur mesurée, l'expérimentateur a accès à la demi-étendue de l'intervalle, notée a (a est l'initiale de « accuracy » c'est-à-dire « précision »).

Si la probabilité de mesurer une valeur entre $[x_{mes} - a; x_{mes} + a]$ est **la même**, alors l'incertitude-type (correspondant toujours à un écart-type) se détermine grâce à la formule suivante :

On ne garde qu'au maximum deux chiffres significatifs pour $u(x)$ et on arrondit la valeur obtenue par excès.

Remarque :

La formule $u(x) = \frac{a}{\sqrt{3}}$ n'est valable que si toutes les valeurs sont équiprobables : si l'énoncé ne précise pas ce point, vous pouvez utiliser cette formule. Si non, une autre formule pour $u(x)$ vous sera précisée.

❖ Comment obtenir la demi-étendue a ?

L'expérimentateur a accès à la valeur de la demi-étendue a grâce à :

- des informations techniques sur l'instrument de mesure données par le fabricant ;
- des informations subjectives sur l'appréciation de la façon dont le mesurage a été effectuée.

Avec un instrument de mesure gradué	Avec un instrument de mesure à affichage digital
<p>La demi-étendue a est liée à la lecture. Sans aucune indication, on considère que la demi-étendue a est égale à la demi-graduation.</p> <p>Durant un TP, si vous estimez que la lecture est « difficile », la demi-étendue a peut être égale à la graduation entière (ou plus)</p>	<p>Dans la notice de l'appareil, le constructeur indique comment déterminer la « précision » qui correspond à la demi-étendue a.</p> <p>La demi-étendue a est en général, égale à un pourcentage p de la valeur lue :</p> $a = p \times \text{valeurlue}$ <p>Parfois on doit y ajouter un nombre N de digit (un digit correspond au poids du dernier chiffre affiché) :</p> $a = p \times \text{valeurlue} + N \text{ digit}$

C. Les incertitudes-type composées :

Très souvent en TP, la valeur expérimentale d'une grandeur n'est pas le résultat recherché de l'expérience. Il faut souvent combiner des valeurs expérimentales de plusieurs grandeurs entre elles, pour obtenir la valeur expérimentale de la grandeur souhaitée.

Exemple :

Afin de mesurer l'intensité d'un courant électrique, on utilise très souvent une méthode indirecte : on réalise le mesurage de la résistance d'un conducteur ohmique (avec son incertitude-type) et le mesurage de la tension électrique à ses bornes (avec son incertitude-type). Grâce à la loi d'Ohm $u = R \times i$, on obtient la valeur expérimentale de $i_{exp} = \frac{u_{exp}}{R_{exp}}$. On vous fournira à chaque fois la formule permettant d'estimer l'incertitude de la nouvelle valeur expérimentale

III. Compatibilité de mesurages et exactitude d'un mesurage

A. Comparer le résultat d'un mesurage au résultat d'un autre mesurage : l'écart normalisé

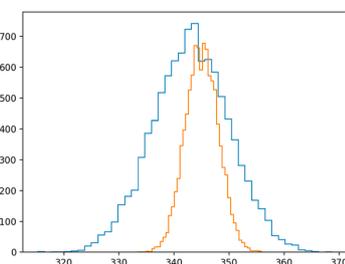
Pour pouvoir comparer deux mesurages d'une même grandeur, il faut un critère quantitatif pour indiquer si ces deux mesurages sont considérés comme compatibles ou incompatibles.

❖ **Définition de l'écart normalisé :**

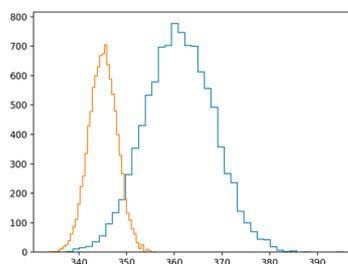
L'écart normalisé, noté E_N , entre deux processus de mesure donnant les valeurs expérimentales $x_{1,exp}$ et $x_{2,exp}$ et des incertitudes-type $u(x_1)$ et $u(x_2)$ est défini par :

Par convention, on qualifie souvent deux résultats de « compatibles » si leur écart normalisé vérifie la propriété $E_N \leq 2$.

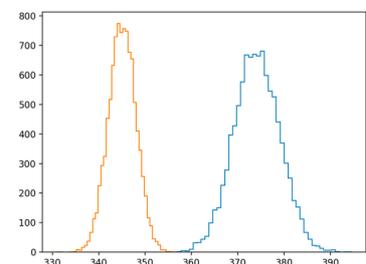
Représentation graphique pour le mesurage de la vitesse de propagation du son dans l'air – type A :



(a) Deux distributions avec $E_N \approx 0.3$.



(b) Deux distributions avec $E_N \approx 2.1$.

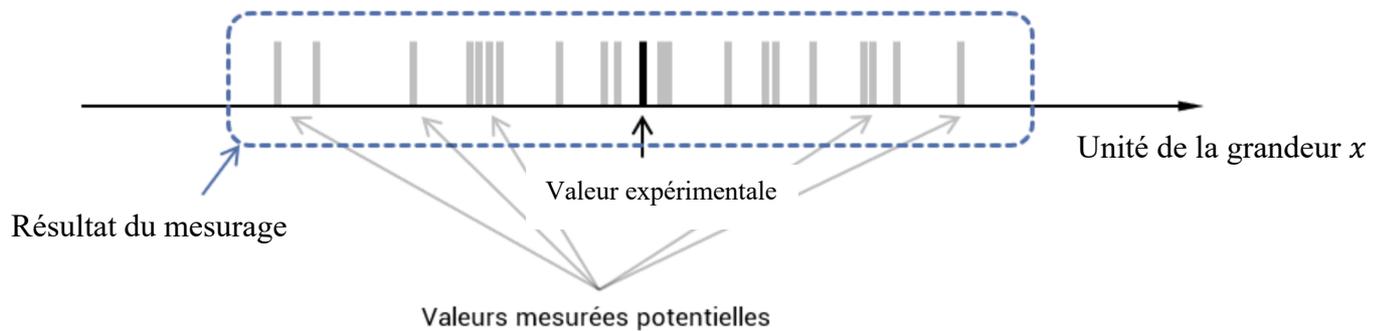


(c) Deux distributions avec $E_N \approx 5.0$.

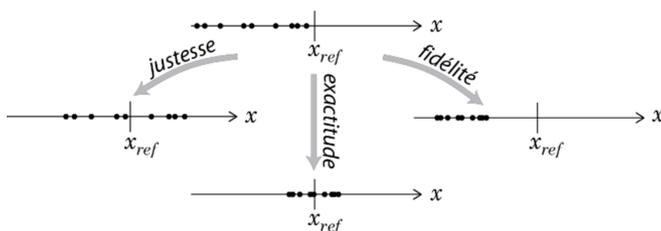
B. Notion de justesse, de fidélité et d'exactitude d'un mesurage :

On suppose dans ce paragraphe qu'une valeur de référence x_{ref} est connue pour la grandeur étudiée.

On peut représenter sur un axe, le résultat du mesurage :



❖ Définitions :



Un mesurage est **fidèle** si l'ensemble des valeurs potentiellement mesurées par des mesurages répétés de la même grandeur se répartissent sur un « intervalle » relativement étroit.

Un mesurage est **juste** si la moyenne d'un nombre infini de valeurs potentiellement mesurées est proche de la valeur de référence.

La **fidélité** est une évaluation de
La **justesse** est une évaluation de
Un mesurage est **exact** s'il est

C. Évaluation de la fidélité d'un mesurage :

La fidélité d'un mesurage est évaluée à l'aide de l'incertitude-type relative $\frac{u(x)}{x_{exp}}$.
Plus l'incertitude-type relative d'un mesurage est faible, plus ce mesurage est fidèle.

❖ Définition de l'incertitude-type relative :

On appelle incertitude relative (en toute rigueur incertitude-type relative) la grandeur :

$$\frac{u(x)}{x_{exp}}$$

Elle s'exprime en pourcentage, x_{exp} et $u(x)$ ayant la même unité.

D. Évaluation de la justesse d'un mesurage : compatibilité du résultat d'un mesurage avec une valeur de référence

Par définition, l'**incertitude-type** quantifie les fluctuations potentielles de la **valeur mesurée**. On s'attend à ce que la **valeur de référence** ne coïncide pas exactement avec la valeur mesurée, mais ne s'en écarte pas plus que de quelques incertitudes-type.

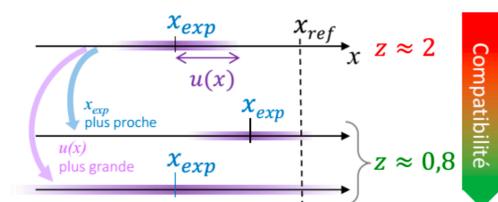
❖ Définition de z-score :

On définit le **z-score** comme l'écart absolu entre la valeur expérimentale x_{exp} et la valeur de référence x_{ref} , divisé par l'incertitude-type :

Lorsque $z < 2$, on considère que le résultat du mesurage est compatible (et donc « juste ») avec la valeur de référence.

Lorsque $z \geq 2$ on considère qu'il ne l'est pas.

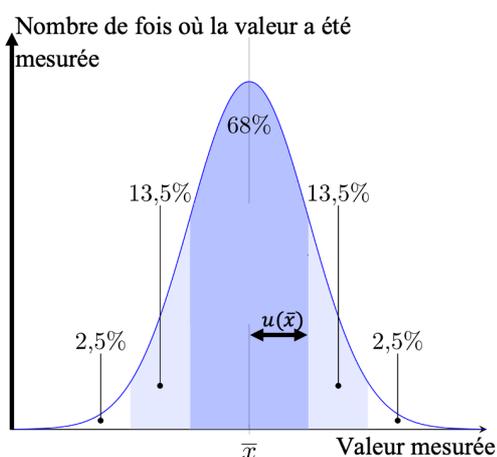
Comment interpréter un z-score supérieur à 2 ?



- Il est possible que l'incertitude-type ait été sous-estimée, ou qu'une source d'incertitude ait été oubliée ; il convient donc de réexaminer les choix qui ont mené à son évaluation (à l'inverse si on a surestimé l'incertitude-type, on risque de conclure par erreur à un accord mesure/référence).
- Il est possible que l'expérience n'ait pas été correctement réalisée.
- La modélisation envisagée du phénomène observé n'est pas complète.

IV. Incertitude de type A et niveau de confiance :

Pour un mesurage avec variabilité observée, on réalise N fois le même protocole pour obtenir l'ensemble des valeurs mesurées $\{x_i\}$. Si ce nombre N est infini, on obtient alors la courbe gaussienne suivante :



L'étude mathématique de cette courbe aboutie aux résultats suivants :

L'expérimentateur a 68% de chance de trouver sa valeur mesurée entre $\bar{x} - u(\bar{x})$ et $\bar{x} + u(\bar{x})$.

L'expérimentateur a 95% de chance de trouver sa valeur mesurée entre $\bar{x} - 2u(\bar{x})$ et $\bar{x} + 2u(\bar{x})$.

❖ Incertitude (ou incertitude élargie) et niveau de confiance : à retenir

On note Δx , l'incertitude élargie liée au mesurage de la grandeur x .

- pour un niveau de confiance de 68%, $\Delta x = \pm u(\bar{x})$: il y a 68%, de chance pour que la valeur mesurée se trouve dans l'intervalle $[\bar{x} - u(\bar{x}); \bar{x} + u(\bar{x})]$
- pour un niveau de confiance de 95%, $\Delta x = \pm 2u(\bar{x})$: il y a 95%, de chance pour que la valeur mesurée se trouve dans l'intervalle $[\bar{x} - 2u(\bar{x}); \bar{x} + 2u(\bar{x})]$

Chapitre 01 - Ce qu'il faut savoir :

- Connaitre les définitions de « mesurage », « valeur mesurée », « valeur expérimentale » et « valeur de référence »
- Connaitre les différentes causes de variabilité d'une valeur mesurée
- Savoir définir un mesurage juste, un mesurage fidèle et un mesurage exact.
- Connaitre la formule de l'écart-type et la moyenne arithmétique
- Savoir que l'incertitude-type est égale à l'écart-type.
- Connaitre les définitions des incertitudes-type A et B
- Connaitre les formules de x_{exp} et $u(\bar{x})$ pour un mesurage avec incertitude-type de type A.
- Savoir que $x_{exp} = x_{mes}$ et $u(x) = \frac{a}{\sqrt{3}}$ pour un mesurage avec incertitude-type de type B.
- Connaitre la formule de l'écart normalisé E_N
- Connaitre la formule littérale de l'incertitude-type relative et savoir qu'elle permet d'évaluer la fidélité d'un mesurage.
- Connaitre la formule du z-score et savoir qu'il permet d'évaluer la justesse d'un mesurage
- Associer l'incertitude élargie $\Delta x = \pm u(\bar{x})$ à un niveau de confiance de 68% pour le type A
- Associer l'incertitude élargie $\Delta x = \pm 2u(\bar{x})$ à un niveau de confiance de 95% pour le type A

Chapitre 01 - Ce qu'il faut savoir-faire :

- Savoir distinguer un mesurage juste, un mesurage fidèle et un mesurage exact.
- Savoir calculer (avec sa calculatrice) l'écart-type et la moyenne arithmétique d'une liste de N valeurs mesurées.
- Savoir rédiger le résultat d'un mesurage en écriture scientifique correctement : 2CS pour l'incertitude-type au max, mêmes puissance de 10 et unités (dernière décimale identiques) .
- Associer à un mesurage le type (A ou B) d'incertitude-type.
- Savoir calculer $u(x)$ pour le type A pour évaluer l'incertitude-type pour l'une des mesures
- Savoir arrondir par excès $u(x)$
- Savoir calculer x_{exp} et $u(\bar{x})$ pour un mesurage avec incertitude-type de type A.
- Savoir déterminer la demi-étendue a pour un appareil de mesure gradué ou un appareil de mesure à affichage digital
- Savoir déterminer l'incertitude-type d'une grandeur calculée (la formule étant fournie)
- Savoir utiliser l'écart normalisé E_N ou le z-score selon la compatibilité étudiée.