

## Chapitre 04 - Représentations fréquentielles de signaux

## Activités et applications

❖ **Théorème de Fourier :**

On étudie un signal  $u(t)$  dont l'expression numérique est la suivante :

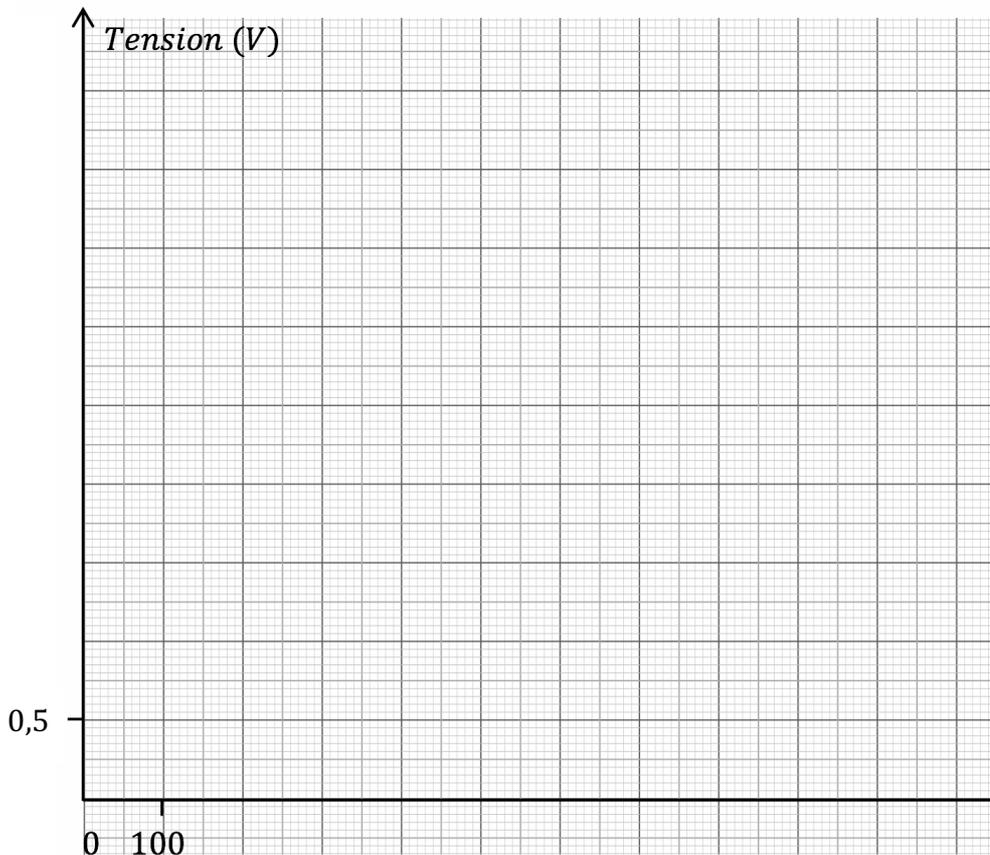
$$u(t) = 3 + 4 \times \cos\left(2\pi \times 200 \times t + \frac{\pi}{2}\right) + 2 \times \cos\left(2\pi \times 400 \times t - \frac{\pi}{4}\right) + 1,5 \times \cos(2\pi \times 600 \times t) + 0,75 \times \cos(2\pi \times 1000 \times t)$$

1. Le signal  $u(t)$  est-il alternatif ? Justifier votre réponse.
2. Entourer sur l'expression numérique, la partie correspondant à la composante alternative du signal  $u(t)$ .

On étudie maintenant uniquement la composante alternative du signal  $u(t)$ , notée  $u_{alt}(t)$ .

$$u_{alt}(t) = 4 \times \cos\left(2\pi \times 200 \times t + \frac{\pi}{2}\right) + 2 \times \cos\left(2\pi \times 400 \times t - \frac{\pi}{4}\right) + 1,5 \times \cos(2\pi \times 600 \times t) + 0,75 \times \cos(2\pi \times 1000 \times t)$$

3. Entourer en rouge la valeur de l'amplitude de chaque harmonique, en vert la valeur de la fréquence de chaque harmonique et en bleu la valeur de la phase à l'origine de chaque harmonique.
4. Tracer le spectre en amplitude du signal  $u(t)$  :



$$u(t) = 3 + 4 \times \cos\left(2\pi \times 200 \times t + \frac{\pi}{2}\right) + 2 \times \cos\left(2\pi \times 400 \times t - \frac{\pi}{4}\right) + 1,5 \times \cos(2\pi \times 600 \times t) + 0,75 \times \cos(2\pi \times 1000 \times t)$$

Pour le signal  $u(t)$ , la fréquence du fondamental est  $f_1 = 200 \text{ Hz}$ .

5. Sur la représentation temporelle, quelle est la valeur de la fréquence du signal  $u(t)$  ?
6. Quel est le rang de l'harmonique dont la fréquence est de  $400 \text{ Hz}$  ? Justifier à l'aide d'un calcul.
7. Quel est le rang de l'harmonique dont la fréquence est de  $600 \text{ Hz}$  ? Justifier à l'aide d'un calcul.
8. Quel est le rang de l'harmonique dont la fréquence est de  $1000 \text{ Hz}$  ? Justifier à l'aide d'un calcul.
9. Quelle est la valeur de l'amplitude de l'harmonique de rang 4 ?
10. Compléter le tableau ci-dessous :

	Composante continue	Fondamental	Harmonique de rang 2	Harmonique de rang 3	Harmonique de rang 4	Harmonique de rang 5
Fréquence (Hz)						
Amplitude ou valeur (V)						
Phase à l'origine						

Le professeur utilise un script Python pour tracer le premier harmonique avec  $\frac{\pi}{2} = 1,57$

11. Qualifier à l'aide des adjectifs usuels le signal observé en précisant la valeur de sa période et de sa fréquence :

Puis, le professeur ajoute l'harmonique de rang 2 avec  $\frac{\pi}{4} = 0,785$ , puis celui du rang 3 et enfin celui de rang 5.

12. Déterminer la période et la fréquence du signal périodique observé dans chaque cas :

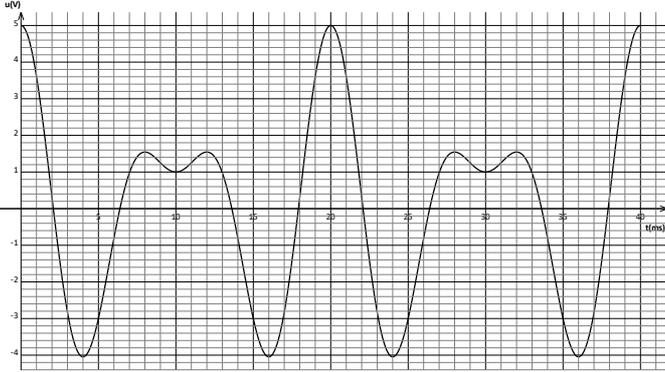
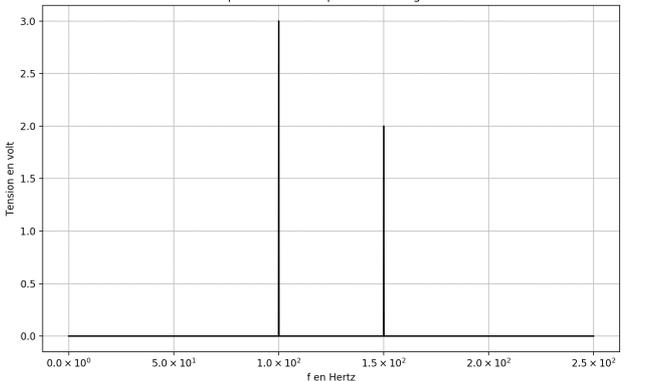
13. Quel est l'effet sur la représentation temporelle du signal de l'ajout des harmoniques de rang supérieur ou égal à 2 ?

❖ **Des spectres en amplitude sans fondamental :**

On étudie le signal  $u(t)$  dont l'expression numérique est la suivante :

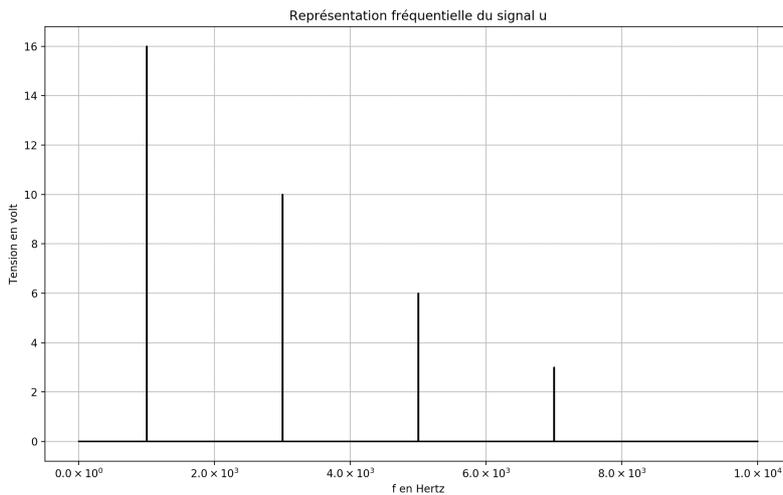
$$u(t) = 3,0 \cos(2\pi \times 100 \times t) + 2,0 \cos(2\pi \times 150 \times t)$$

14. Compléter le tableau suivant :

Représentation temporelle	Représentation fréquentielle
	
<p>On détermine graphiquement, la période du signal <math>u(t)</math> :</p> <p>On en déduit que la fréquence du signal <math>u(t)</math> est :</p> <p>Le fondamental <b>impose</b> cette fréquence <math>f</math> au signal <math>u(t)</math>. La fréquence du fondamental du signal <math>u(t)</math> est donc :</p>	<p>D'après notre étude de la représentation temporelle du signal, on sait que le fondamental a pour abscisse :</p> <p>Il n'apparaît pas sur le spectre ci-dessus :</p> <p>L'harmonique (signal sinusoïdal alternatif) de fréquence <math>100 = \quad \times 50</math> est donc l'harmonique de rang <math>\quad</math>. Son amplitude est <math>\quad</math>.</p> <p>L'harmonique (signal sinusoïdal alternatif) de fréquence <math>150 = \quad \times 50</math> est donc l'harmonique de rang <math>\quad</math>. Son amplitude est <math>\quad</math>.</p>

❖ Apprendre à exploiter un spectre :

On étudie un signal  $u(t)$  dont le spectre en amplitude est le suivant :



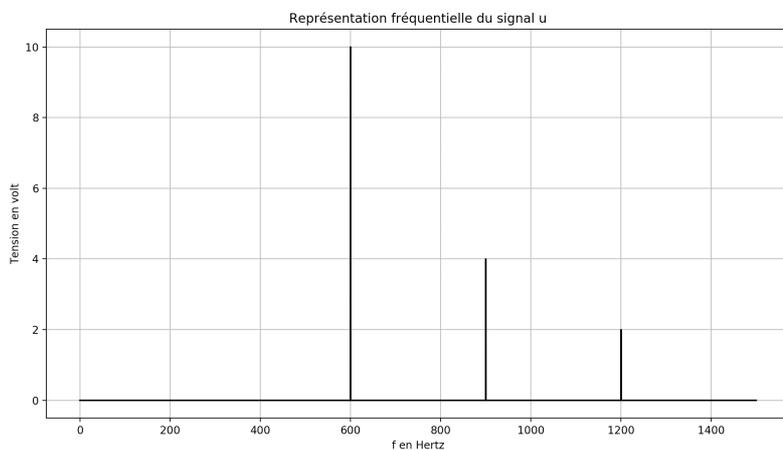
15. Le signal est-il alternatif ?  
Justifier votre réponse.

16. Compléter le tableau suivant à l'aide du spectre de  $u(t)$ :

	Composante continue	Fondamental	Harmonique de rang 2	Harmonique de rang 3	Harmonique de rang 4	Harmonique de rang 5	Harmonique de rang 6	Harmonique de rang 7
Fréquence mesurée (Hz)								
Amplitude ou valeur (V)								

17. Donner l'expression numérique possible pour le signal  $u(t)$  en prenant toutes les phases à l'origine nulles :

On étudie un signal  $u(t)$  dont le spectre en amplitude est le suivant :

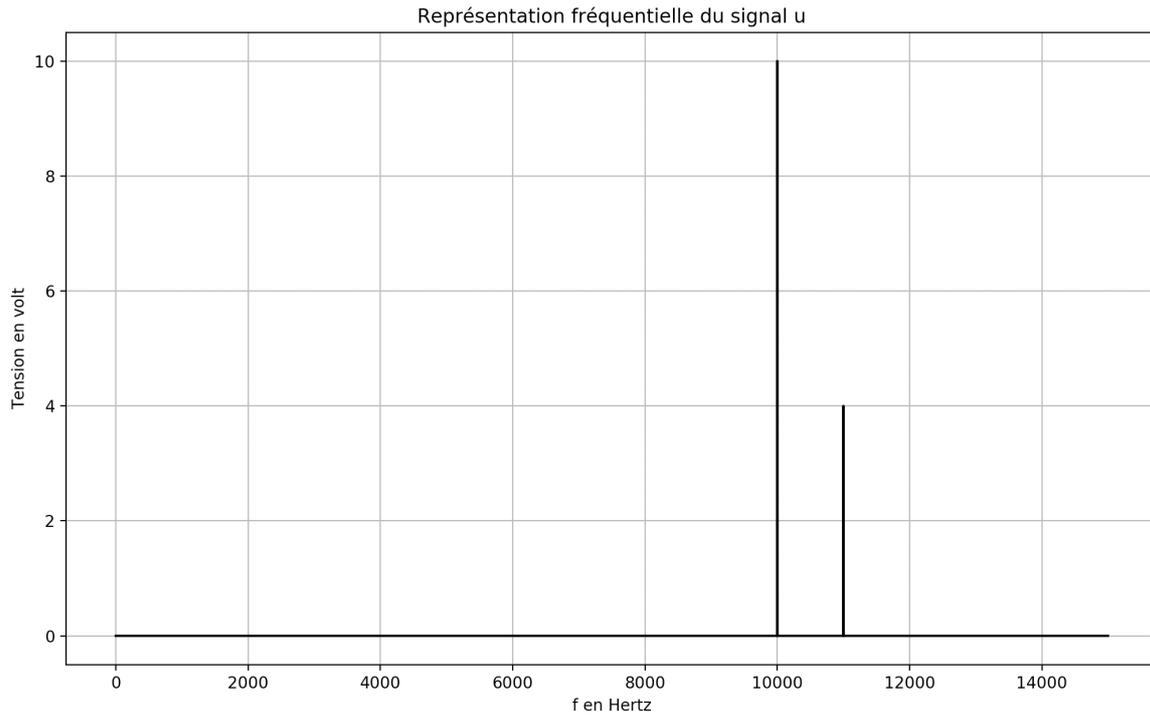


18. Quelle est la fréquence du fondamental du signal ?

19. Compléter le tableau suivant à l'aide du spectre de  $u(t)$ :

	Fondamental	Harmonique de rang 2	Harmonique de rang 3	Harmonique de rang 4
Fréquence mesurée (Hz)				
Amplitude mesurée (V)				

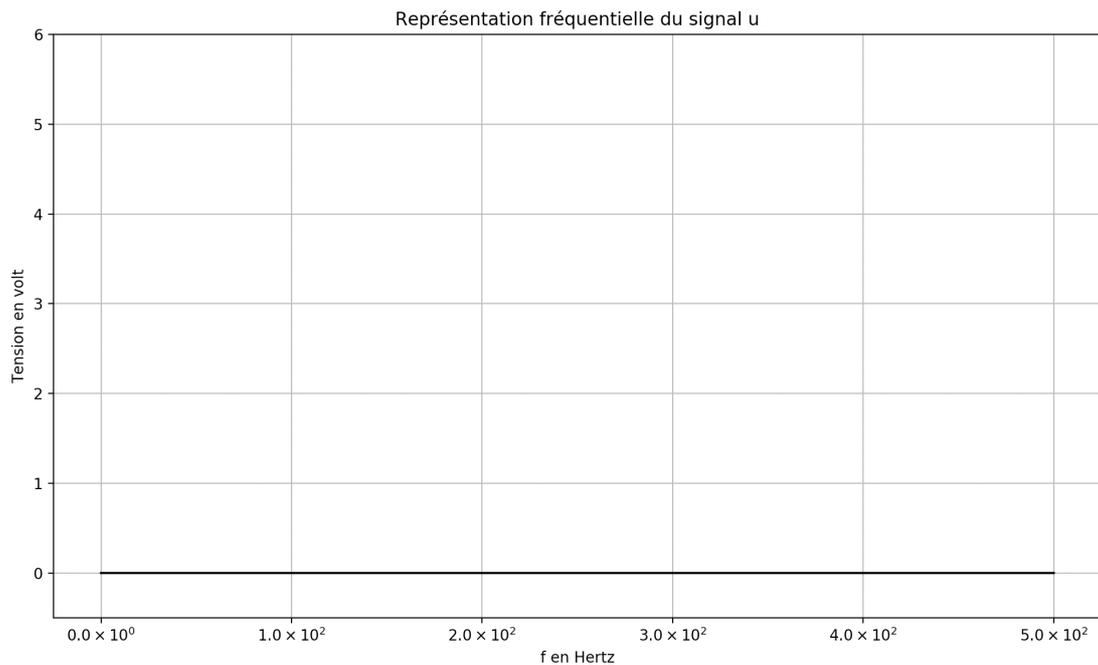
20. Quelle est la fréquence du fondamental du signal, dont le spectre est le suivant ? Quels sont les rangs des harmoniques « visibles » ?



❖ **Apprendre à tracer un spectre :**

21. Tracer l'allure du spectre en amplitude du signal  $u(t)$  suivant :

$$u(t) = 5,0 + 6,0 \cos(200\pi t) + 2,0 \cos(400\pi t) + 1,0 \cos(800\pi t)$$



❖ **Série de Fourier pour un signal triangulaire :**

22. On étudie un signal  $u(t)$  périodique, triangulaire, alternatif, d'amplitude  $U_m = 3,00 V$ , de fréquence  $f_1 = 200 Hz$ . Compléter le tableau suivant :

Harmonique de rang $n$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$
Fréquence $f_n (Hz)$							
Amplitude $A_n (V)$							

A l'aide du script Python, le professeur trace la représentation temporelle et fréquentielle du signal comportant les harmoniques de rang 1, puis 3, 5, 7 et enfin jusqu'au rang 20.

23. Quels points du signal triangulaire sont les plus difficiles à synthétiser ?

❖ **Série de Fourier pour un signal carré :**

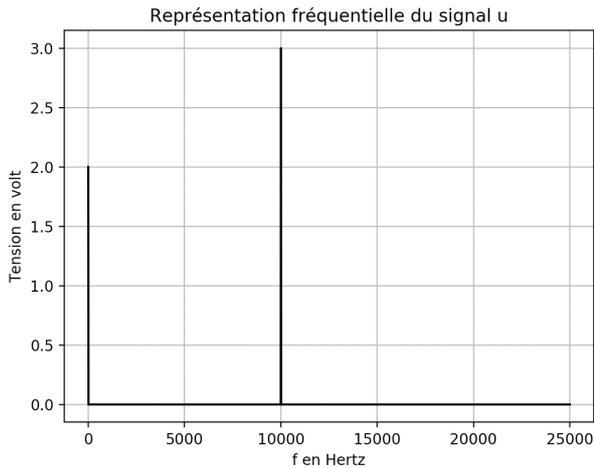
24. On étudie un signal  $u(t)$  périodique, carré, alternatif, d'amplitude  $U_m = 3,00 V$ , de fréquence  $f_1 = 150 Hz$ . Compléter le tableau suivant :

Harmonique de rang $n$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$
Fréquence $f_n (Hz)$							
Amplitude $A_n (V)$							

A l'aide du script Python, le professeur trace la représentation temporelle et fréquentielle du signal comportant les harmoniques de rang 1, puis 3, 5, 7 et enfin jusqu'au rang 80.

25. Quels points du signal carré sont les plus difficiles à synthétiser ?

### ❖ Encombrement spectral d'un signal :



26. Déterminer l'encombrement spectral du signal sinusoïdal dont le spectre est donné ci-contre :

27. Déterminer l'encombrement spectral du signal triangulaire précédent :

28. Déterminer l'encombrement spectral à 5% (de l'amplitude du signal), pour signal triangulaire précédent :

29. L'encombrement spectral à 5% (de l'amplitude du signal) du signal carré précédent est-il plus grand ou plus faible que celui du signal triangulaire précédent ?

### ❖ Qu'est-ce qu'un système filtrant ?

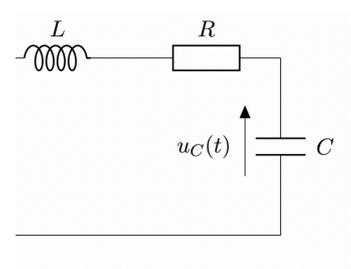
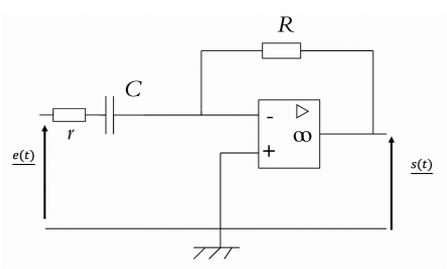
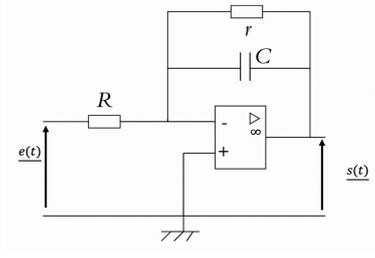
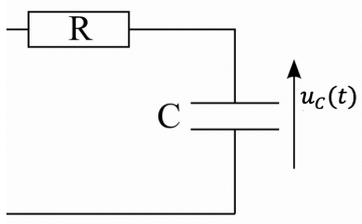
On considère un signal d'entrée périodique, de fréquence  $f_1$ , constitué d'une composante continue et d'harmoniques. On peut comparer les spectres du signal d'entrée et de sortie pour savoir si le système est un filtre.

30. Pour chaque système, compléter la case vide en indiquant si le système étudié est un filtre ou non.

Systeme	Specre du signal d'entree	Specre du signal de sortie	Filtre ?
A			
B			
C			
D			

❖ Qu'est-ce qu'un filtre passif ? actif ?

31. Pour les systemes electriques suivants, indiquer s'il s'agit de filtre passif ou actif :



## ❖ Exemple d'application pour les filtres analogiques :



Un signal audio (en général non périodique) contient une infinité de raies dont les fréquences sont comprises entre 20 Hz et 20 kHz.

Dans l'exemple de l'enceinte QUAD 11L (photo ci-contre), cette enceinte comporte deux haut-parleurs et le constructeur indique une fréquence de coupure de 2,2 kHz :

- le « grand » haut-parleur est efficace pour des « faibles » fréquences entre 20 Hz et 2,2 kHz (correspondant aux sons graves)
- le « petit » haut-parleur est efficace pour des fréquences « élevées » entre 2,2 kHz et 20 kHz (correspondant aux sons aigus)

Il est donc nécessaire que l'amplificateur HIFI envoie « les bonnes fréquences » vers chacun des haut-parleurs. Pour cela, il possède des systèmes appelés *filtres* :

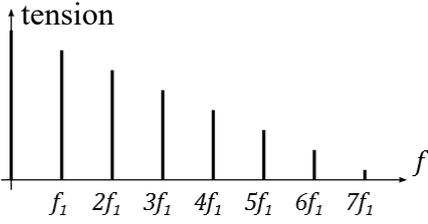
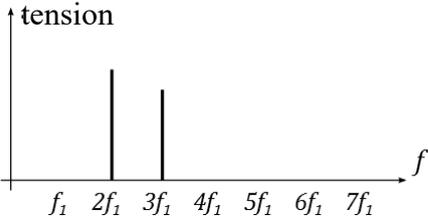
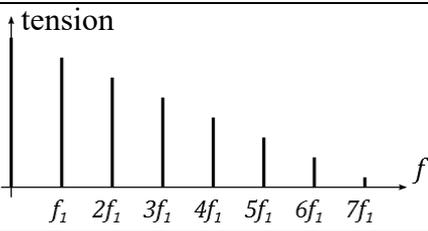
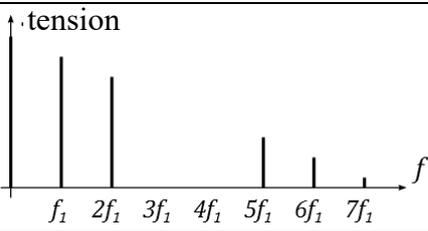
- un filtre passe-bas actif (amplifiant les basses fréquences comprises entre 20 Hz et 2,2 kHz)
- un filtre passe-haut actif (amplifiant les hautes fréquences comprises entre 2,2 Hz et 20 kHz)

On voit sur cet exemple qu'il est nécessaire de connaître comment un système filtre un signal d'entrée.

## ❖ Représentations fréquentielles des signaux d'entrée et de sortie : filtres idéaux passifs

32. Compléter le tableau suivant en indiquant la nature du filtrage réalisé et son éventuel « idéalité » :

Système	Spectre du signal d'entrée	Spectre du signal de sortie	Nature du filtrage
A			
B			
C			

D			
E			

On donne  $f_1 = 100 \text{ Hz}$  .

33. Pour le système A, indiquer la seule valeur de fréquence de coupure  $f_c$  possible parmi les suivantes :

$$f_c = 50 \text{ Hz} ; f_c = 150 \text{ Hz} ; f_c = 190 \text{ Hz} ; f_c = 250 \text{ Hz} ; f_c = 350 \text{ Hz}$$

34. Le système A possède-t-il la même fréquence de coupure  $f_c$  que le système B ?

35. En déduire la bande passante ainsi que la largeur de la bande passante du système A :

36. Pour le système C, indiquer la seule valeur de fréquence de coupure possible parmi les suivantes :

$$f_c = 50 \text{ Hz} ; f_c = 250 \text{ Hz} ; f_c = 390 \text{ Hz} ; f_c = 450 \text{ Hz} ; f_c = 550 \text{ Hz}$$

37. En déduire la bande passante ainsi que la largeur de la bande passante du système C :

38. Pour le système D, indiquer les seules valeurs de fréquence de coupure possible parmi les suivantes :

$$f_c = 50 \text{ Hz} ; f_c = 130 \text{ Hz} ; f_c = 250 \text{ Hz} ; f_c = 327 \text{ Hz} ; f_c = 430 \text{ Hz}$$

39. En déduire la bande passante ainsi que la largeur de la bande passante du système D :

❖ Amplification  $T_0$  dans la bande passante du système :

40. Compléter le tableau suivant en indiquant le nom de  $T_0$  ainsi que sa valeur :

Systeme	Specre du signal d'entrée	Specre du signal de sortie	Nom et valeur de $T_0$
A			
B			
C			