Chapitre 04 - Représentations fréquentielles de signaux

Activités et applications

❖ Théorème de Fourier :

On étudie un signal $u(t)$ dont l'expression numérique est la suivante :

$$u(t) = 3 + \boxed{4 \times \cos\left(2\pi \times 200 \times t + \frac{\pi}{2}\right) + 2 \times \cos\left(2\pi \times 400 \times t - \frac{\pi}{4}\right) + 1{,}5 \times \cos(2\pi \times 600 \times t) + 0{,}75 \times \cos(2\pi \times 1000 \times t)}$$

1. Le signal $u(t)$ est-il alternatif ? Justifier votre réponse.

Le signal $u(t)$ possède une composante continue de valeur $\langle u \rangle = 3\ V$: il n'est donc pas alternatif.

2. Entourer sur l'expression numérique, la partie correspondant à la composante alternative du signal $u(t)$.

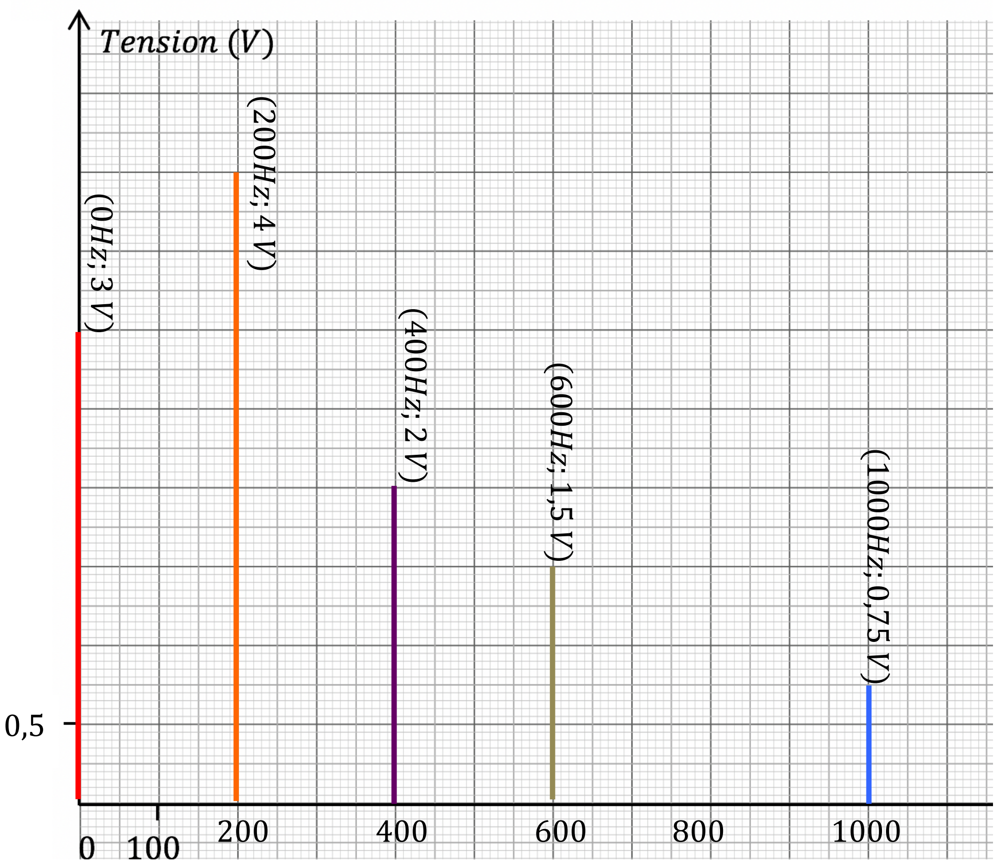
On étudie maintenant uniquement la composante alternative du signal $u(t)$, notée $u_{alt}(t)$.

$$u_{alt}(t) = 4 \times \cos\left(2\pi \times 200 \times t + \frac{\pi}{2}\right) + 2 \times \cos\left(2\pi \times 400 \times t - \frac{\pi}{4}\right) + 1{,}5 \times \cos(2\pi \times 600 \times t) + 0{,}75 \times \cos(2\pi \times 1000 \times t)$$

3. Entourer en rouge la valeur de l'amplitude de chaque harmonique, en vert la valeur de la fréquence de chaque harmonique et en bleu la valeur de la phase à l'origine de chaque harmonique.

Les deux dernières phases à l'origine sont nulles.

4. Tracer le spectre en amplitude du signal $u(t)$:



$$u(t) = 3 + 4 \times \cos\left(2\pi \times 200 \times t + \frac{\pi}{2}\right) + 2 \times \cos\left(2\pi \times 400 \times t - \frac{\pi}{4}\right) + 1{,}5 \times \cos(2\pi \times 600 \times t) + 0{,}75 \times \cos(2\pi \times 1000 \times t)$$

Pour le signal $u(t)$, la fréquence du fondamental est $f_1 = 200\ Hz$.

5. Sur la représentation temporelle, quelle est la valeur de la fréquence du signal $u(t)$?

Le signal $u(t)$ a une fréquence de $200\ Hz$ car c'est le fondamental qui impose la fréquence au signal.

6. Quel est le rang de l'harmonique dont la fréquence est de $400\ Hz$? Justifier à l'aide d'un calcul.

$n = \frac{400}{200} = 2$ donc l'harmonique (dont la fréquence est de $400\ Hz$) est de rang 2

7. Quel est le rang de l'harmonique dont la fréquence est de $600\ Hz$? Justifier à l'aide d'un calcul.

$n = \frac{600}{200} = 3$ donc l'harmonique (dont la fréquence est de $600\ Hz$) est de rang 3

8. Quel est le rang de l'harmonique dont la fréquence est de $1000\ Hz$? Justifier à l'aide d'un calcul.

$n = \frac{1000}{200} = 5$ donc l'harmonique (dont la fréquence est de $1000\ Hz$) est de rang 5.

9. Quelle est la valeur de l'amplitude de l'harmonique de rang 4 ?

Pour $f_4 = 4 \times f_1 = 4 \times 200 = 800\ Hz$, l'amplitude A_4 est nulle : $A_4 = 0\ V$

10. Compléter le tableau ci-dessous :

	Composante continue	Fondamental	Harmonique de rang 2	Harmonique de rang 3	Harmonique de rang 4	Harmonique de rang 5
Fréquence (Hz)	0	200	400	600	800	1000
Amplitude ou valeur (V)	3	4	2	1,5	0	0,75
Phase à l'origine		$+\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	0	0

Le professeur utilise un script Python pour tracer le premier harmonique avec $\frac{\pi}{2} = 1{,}57$ (attention à taper 1.57 et non 1,57).

11. Qualifier à l'aide des adjectifs usuels le signal observé en précisant la valeur de sa période et de sa fréquence :

On observe un signal variable sinusoïdal alternatif, de période $T = 5\ ms$. La fréquence du motif est donc :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{5 \times 10^{-3}} = 200\ Hz$$

Puis, le professeur ajoute l'harmonique de rang 2 avec $\frac{\pi}{4} = 0{,}785$, puis celui du rang 3 et enfin celui de rang 5.

12. Déterminer la période et la fréquence du signal périodique observé dans chaque cas :

$$T = 5\ ms \text{ et } f = 200\ Hz$$

Le motif conserve une période $T = 5\ ms$ et une fréquence $f = 200\ Hz$ malgré l'ajout des harmoniques : c'est le fondamental ($200\ Hz$) qui impose sa fréquence.

13. Quel est l'effet sur la représentation temporelle du signal de l'ajout des harmoniques de rang supérieur ou égal à 2 ?

L'ajout des harmoniques de rang supérieur ou égal à 2 ne modifie que la forme du motif.

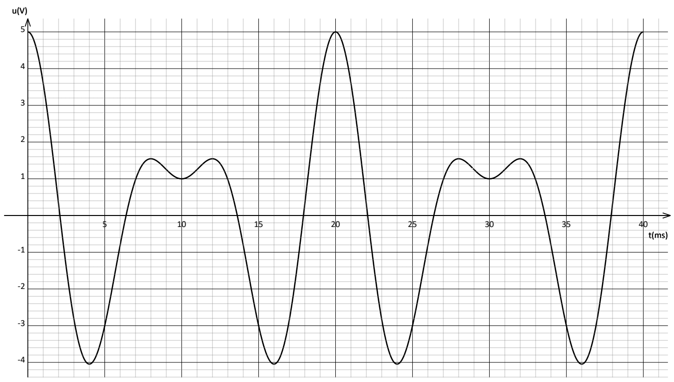
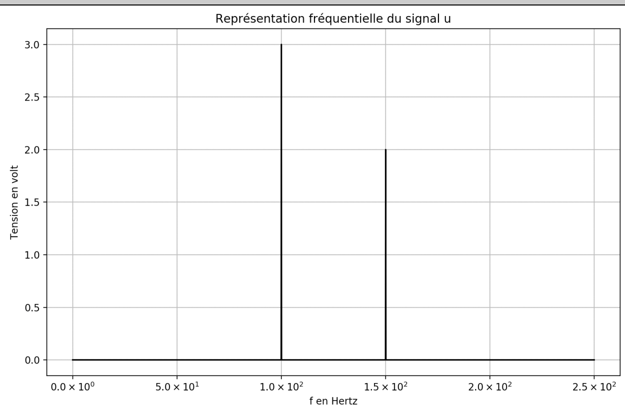
❖ Des spectres en amplitude sans fondamental :

On étudie le signal $u(t)$ dont l'expression numérique est la suivante :

$$u(t) = 3{,}0 \cos(\ 2\pi \times 100 \times t)\ + 2{,}0 \cos(\ 2\pi \times 150 \times t)$$

On remarque que $150\ Hz$ n'est pas un multiple entier de $100\ Hz$.

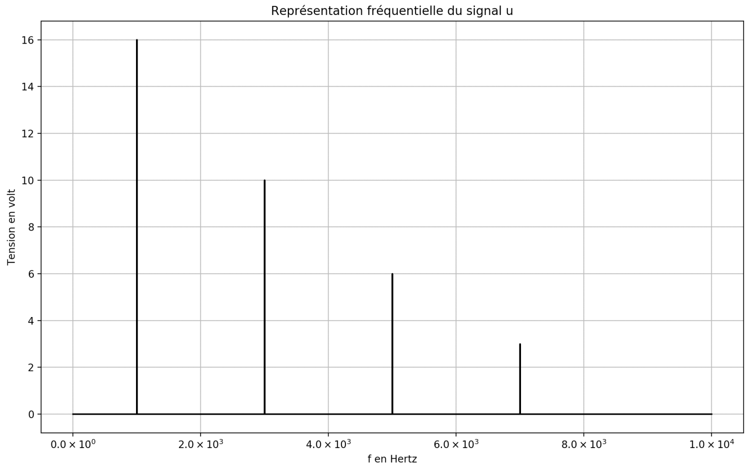
14. Compléter le tableau suivant :

Représentation temporelle	Représentation fréquentielle
	
On détermine graphiquement, la période du signal $u(t)$: $T = 20\ ms$. On en déduit que la fréquence du signal $u(t)$ est : $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}020} = 50\ Hz.$ Le fondamental **impose** cette fréquence f au signal $u(t)$. La fréquence du fondamental du signal $u(t)$ est donc : $f_1 = f = 50\ Hz.$	D'après notre étude de la représentation temporelle du signal, on sait que le fondamental a pour abscisse : $f_1 = 50\ Hz$ Il n'apparait pas sur le spectre ci-dessus : son amplitude A_1 est donc nulle. $A_1 = 0\ V$ L'harmonique (signal sinusoïdal alternatif) de fréquence $100 = 2 \times 50$ est donc l'harmonique de rang 2. Son amplitude est $A_2 = 3{,}0\ V$ L'harmonique (signal sinusoïdal alternatif) de fréquence $150 = 3 \times 50$ est donc l'harmonique de rang 3. Son amplitude est $A_3 = 2{,}0\ V$

50 est le plus grand commun diviseur des nombres 100 et 150.

❖ Apprendre à exploiter un spectre :

On étudie un signal $u(t)$ dont le spectre en amplitude est le suivant :



15. Le signal est-il alternatif ? Justifier votre réponse.

Le signal est alternatif car il n'y a pas de composante continue (sur la fréquence 0 Hz) : la valeur moyenne du signal est donc nulle.

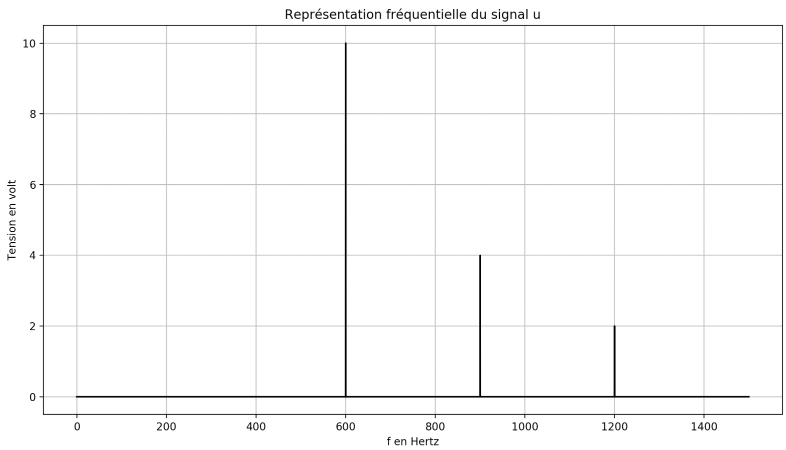
16. Compléter le tableau suivant à l'aide du spectre de $u(t)$:

	Composante continue	Fondamental	Harmonique de rang 2	Harmonique de rang 3	Harmonique de rang 4	Harmonique de rang 5	Harmonique de rang 6	Harmonique de rang 7
Fréquence mesurée (Hz)	0	$1{,}0 \times 10^3$	$2{,}0 \times 10^3$	$3{,}0 \times 10^3$	$4{,}0 \times 10^3$	$5{,}0 \times 10^3$	$6{,}0 \times 10^3$	$7{,}0 \times 10^3$
Amplitude ou valeur (V)	0	16	0	10	0	6	0	3

17. Donner l'expression numérique possible pour le signal $u(t)$ en prenant toutes les phases à l'origine nulles :

$$u(t) = 16\cos(\,2 \times 1{,}0 \times 10^3 \times \pi t) + 10\cos(\,2 \times 3{,}0 \times 10^3 \times \pi t) + 6{,}0\cos(\,2 \times 5{,}0 \times 10^3 \times \pi t) + 3{,}0\cos(\,2 \times 7{,}0 \times 10^3 \times \pi t)$$

On étudie un signal $u(t)$ dont le spectre en amplitude est le suivant :



18. Quelle est la fréquence du fondamental du signal ?

Les harmoniques ont pour fréquences $600\ Hz;\ 900\ Hz\ et\ 1200\ Hz.$

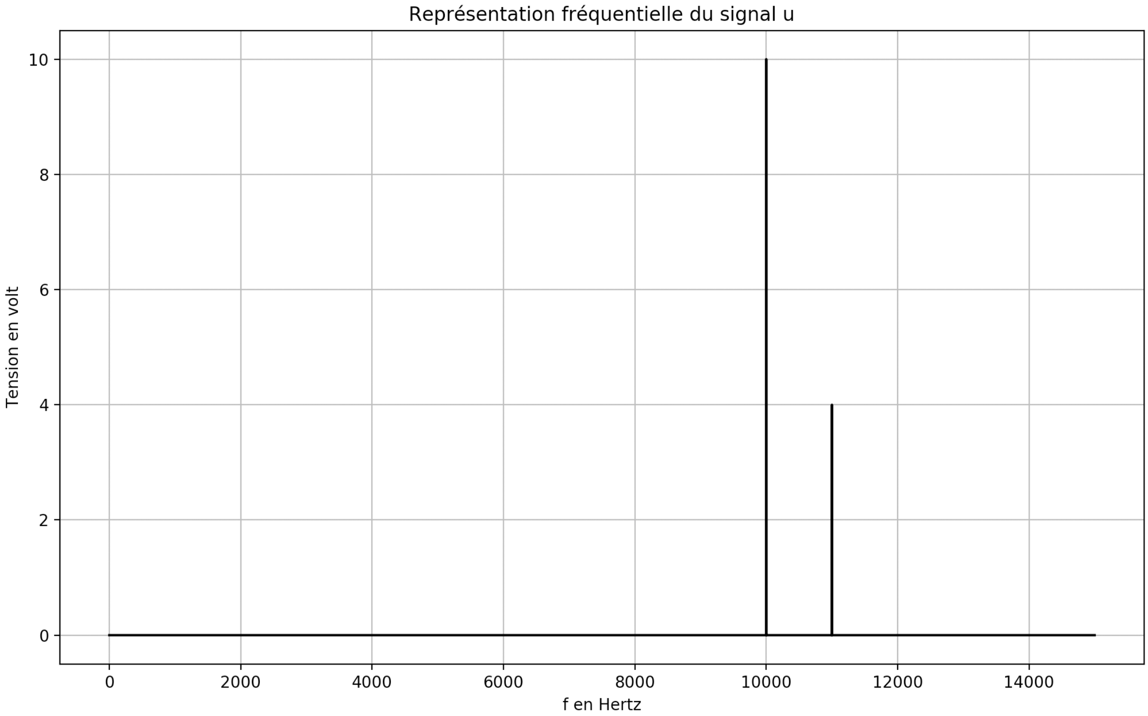
900 n'est pas un multiple entier de 600. La raie à 600 Hz n'est donc pas le fondamental.

Le plus grand commun diviseur est 300 : la fréquence du fondamental est donc 300 Hz

19. Compléter le tableau suivant à l'aide du spectre de $u(t)$:

	Fondamental	Harmonique de rang 2	Harmonique de rang 3	Harmonique de rang 4
Fréquence mesurée (Hz)	300	600	900	1200
Amplitude mesurée (V)	0	10	4,0	2,0

20. Quelle est la fréquence du fondamental du signal, dont le spectre est le suivant ? Quels sont les rangs des harmoniques « visibles » ?

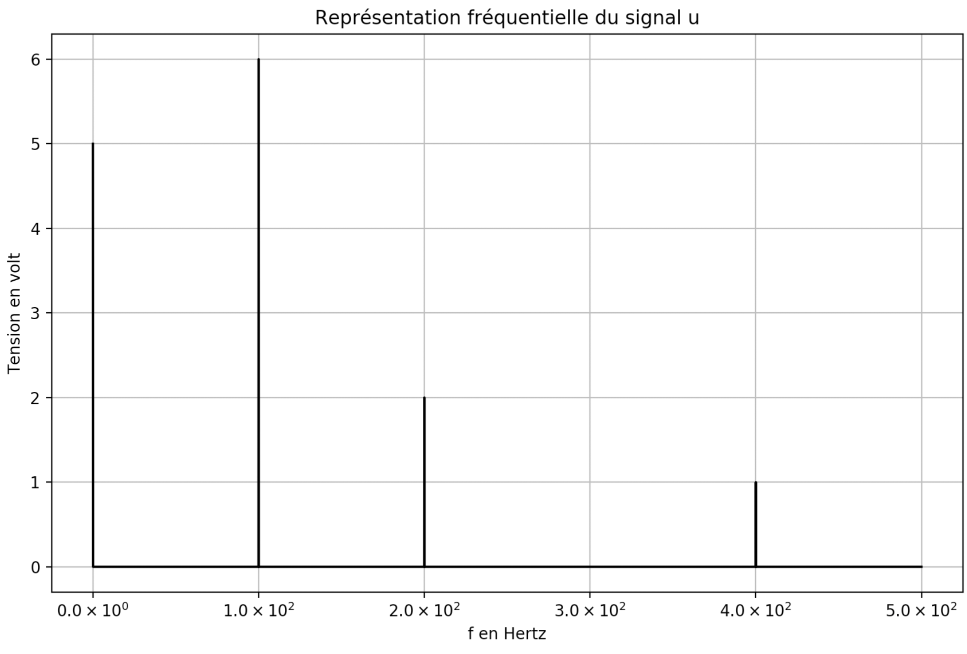


11 000 n'est pas un multiple entier de 10 000. La raie à 10 000 Hz n'est donc pas le fondamental.
Il faut trouver le plus grand commun diviseur de 10 000 et 11 000. Le plus grand commun diviseur est 1000 : la fréquence du fondamental est donc 1000 Hz.
Les rangs des harmoniques sont donc 10 et 11.

❖ Apprendre à tracer un spectre :

21. Tracer l'allure du spectre en amplitude du signal $u(t)$ suivant :

$$u(t) = 5{,}0 + \ 6{,}0\cos(\ 200\pi t) \ + 2{,}0\cos(\ 400\pi t) \ + 1{,}0\cos(\ 800\pi t)$$



❖ Série de Fourier pour un signal triangulaire :

22. On étudie un signal $u(t)$ périodique, triangulaire, alternatif, d'amplitude $U_m = 3{,}00\ V$, de fréquence $f_1 = 200\ Hz$. Compléter le tableau suivant :

Harmonique de rang n	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$
Fréquence $f_n\ (Hz)$	200	400	600	800	1000	1200	1400
Amplitude $A_n\ (V)$	$\frac{8U_m}{\pi^2} = \frac{8 \times 3{,}00}{\pi^2} = 2{,}43$	0	$\frac{8U_m}{(3\pi)^2} = \frac{8 \times 3{,}00}{(3\pi)^2} = 0{,}270$	0	$\frac{8U_m}{(5\pi)^2} = \frac{8 \times 3{,}00}{(5\pi)^2} = 0{,}0973$	0	$\frac{8U_m}{(7\pi)^2} = \frac{8 \times 3{,}00}{(7\pi)^2} = 0{,}0496$

A l'aide du script Python, le professeur trace la représentation temporelle et fréquentielle du signal comportant les harmoniques de rang 1, puis 3, 5, 7 et enfin jusqu'au rang 20.

23. Quels points du signal triangulaire sont les plus difficiles à synthétiser ?

Les points situés aux extremums du signal triangulaire sont les plus difficile à synthétiser : ce sont des points sur lesquels la dérivée de la fonction $u(t)$ n'est pas définie.

❖ Série de Fourier pour un signal carré :

24. On étudie un signal $u(t)$ périodique, carré, alternatif, d'amplitude $U_m = 3{,}00\ V$, de fréquence $f_1 = 150\ Hz$. Compléter le tableau suivant :

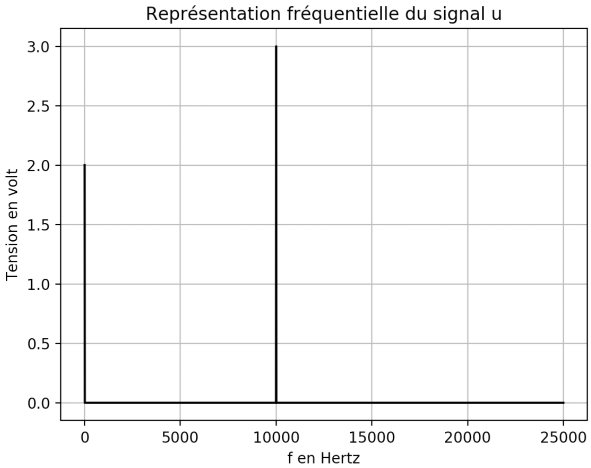
Harmonique de rang n	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$
Fréquence $f_n\ (Hz)$	150	300	450	600	750	900	1050
Amplitude $A_n\ (V)$	$\frac{4U_m}{\pi} = \frac{4 \times 3{,}00}{\pi} = 3{,}82$	0	$\frac{4U_m}{3\pi} = \frac{4 \times 3{,}00}{3\pi} = 1{,}27$	0	$\frac{4U_m}{5\pi} = \frac{4 \times 3{,}00}{5\pi} = 0{,}764$	0	$\frac{4U_m}{7\pi} = \frac{4 \times 3{,}00}{7\pi} = 0{,}546$

A l'aide du script Python, le professeur trace la représentation temporelle et fréquentielle du signal comportant les harmoniques de rang 1, puis 3, 5, 7 et enfin jusqu'au rang 80.

25. Quels points du signal carré sont les plus difficiles à synthétiser ?

Les points situés aux discontinuités sont les plus difficile à synthétiser : ce sont des points sur lesquels la dérivée de la fonction $u(t)$ n'est pas définie.

❖ Encombrement spectral d'un signal :



26. Déterminer l'encombrement spectral du signal sinusoïdal dont le spectre est donné ci-contre :

$$\Delta f = f_{max} - f_{min} = 10000 - 0 = 10\,000\ Hz$$

27. Déterminer l'encombrement spectral du signal triangulaire précédent :

$$\Delta f = f_{max} - f_{min} \rightarrow +\infty$$

28. Déterminer l'encombrement spectral à 5% (de l'amplitude du signal), pour signal triangulaire précédent :

$$U_m = 3{,}00\ V\ donc \frac{5}{100} \times U_m = 0{,}15V$$

On garde tous les harmoniques ayant une amplitude plus grande que $0{,}15V$: le dernier harmonique à comptabiliser est donc celui du rang 3.

$$\Delta f = f_{max} - f_{min} = 600 - 200 = 400\ Hz$$

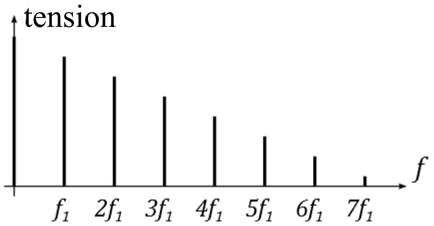
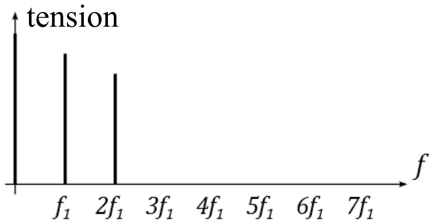
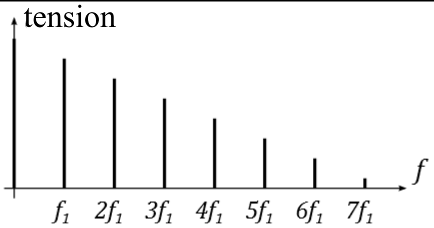
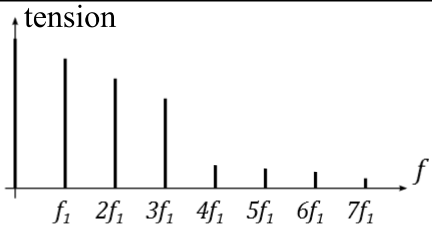
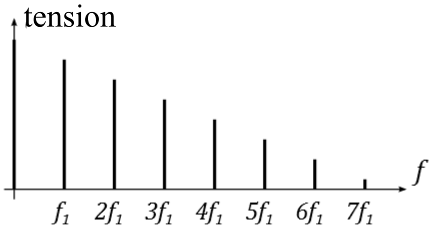
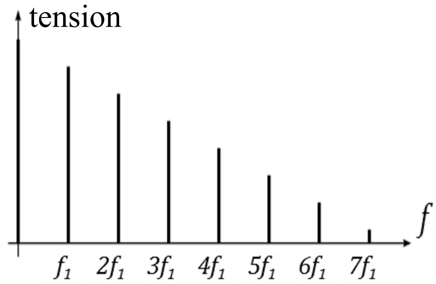
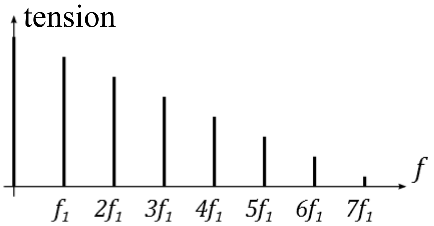
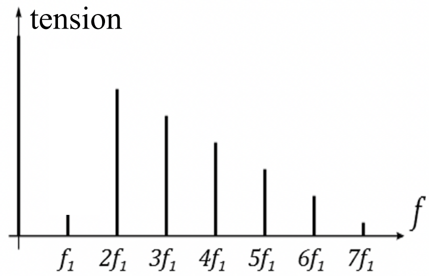
29. L'encombrement spectral à 5% (de l'amplitude du signal) du signal carré précédent est-il plus grand ou plus faible que celui du signal triangulaire précédent ?

L'encombrement spectral à 5% (de l'amplitude du signal) du signal carré précédent est plus grand que celui du signal triangulaire précédent.

❖ Qu'est-ce qu'un système filtrant ?

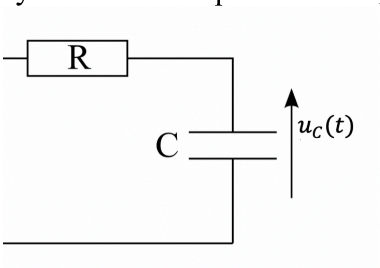
On considère un signal d'entrée périodique, de fréquence f_1, constitué d'une composante continue et d'harmoniques. On peut comparer les spectres du signal d'entrée et de sortie pour savoir si le système est un filtre.

30. Pour chaque système, compléter la case vide en indiquant si le système étudié est un filtre ou non.

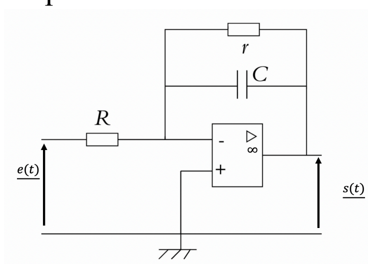
Système	Spectre du signal d'entrée	Spectre du signal de sortie	Filtre ?
A			Ce système est un filtre
B			Ce système est un filtre
C			Ce système n'est pas un filtre
D			Ce système est un filtre

❖ **Qu'est-ce qu'un filtre passif ? actif ?**

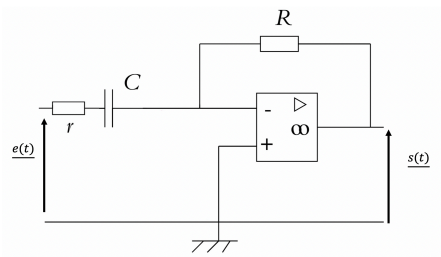
31. Pour les systèmes électriques suivants, indiquer s'il s'agit de filtre passif ou actif :



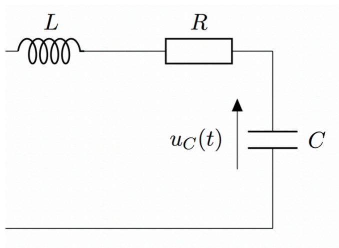
Filtre passif



Filtre actif



Filtre actif



Filtre passif

❖ Exemple d'application pour les filtres analogiques :

Un signal audio (en général non périodique) contient une infinité de raies dont les fréquences sont comprises entre $20\ Hz\ et\ 20\ kHz$.

Dans l'exemple de l'enceinte $QUAD\ 11L$ (photo ci-contre), cette enceinte comporte deux haut-parleurs et le constructeur indique une fréquence de coupure de $2{,}2\ kHz$:

- le « grand » haut-parleur est efficace pour des « faibles » fréquences entre $20\ Hz\ et\ 2{,}2\ kHz$ (correspondant aux sons graves)
- le « petit » haut-parleur est efficace pour des fréquences « élevées » entre $2{,}2\ kHz\ et\ 20\ kHz$ (correspondant aux sons aigus)

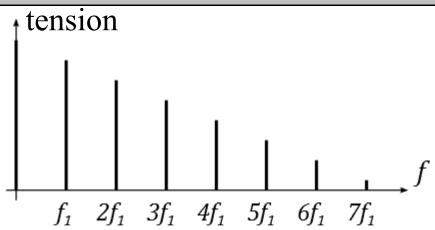
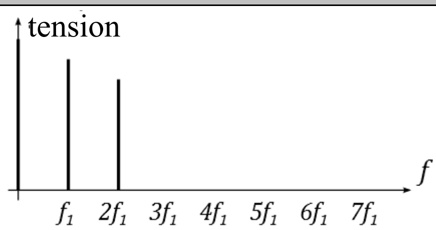
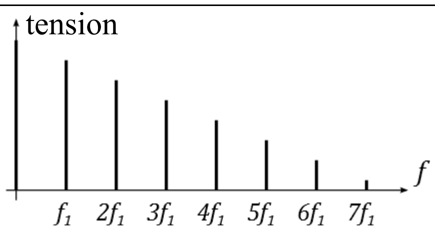
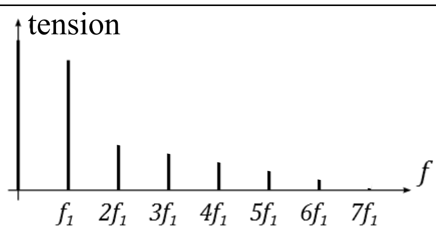
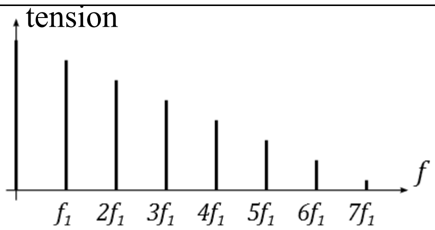
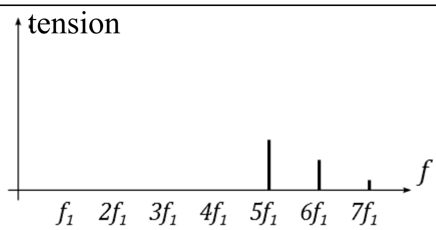
Il est donc nécessaire que l'amplificateur HIFI envoie « les bonnes fréquences » vers chacun des haut-parleurs. Pour cela, il possède des systèmes appelés *filtres :*

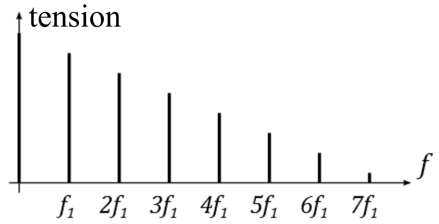
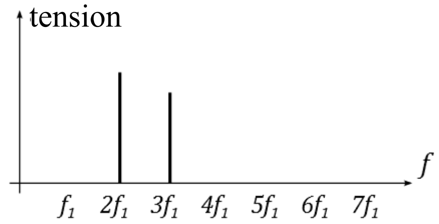
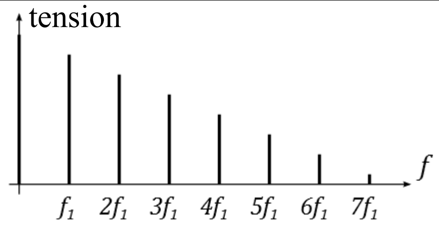
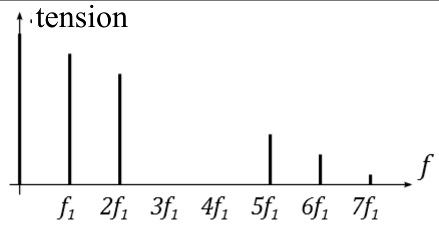
- un filtre passe-bas actif (amplifiant les basses fréquences comprises entre $20\ Hz\ et\ 2{,}2\ kHz$)
- un filtre passe-haut actif (amplifiant les hautes fréquences comprises entre $2{,}2\ Hz\ et\ 20\ kHz$)
  jouer ici sur Audacity Instant Crush

On voit sur cet exemple qu'il est nécessaire de connaître comment un système filtre un signal d'entrée.
Pour le prof : donner aussi les exemples des filtres passe-bas lors de la CAN ou CNA (filtre anti-repliement, filtre de lissage)

❖ Représentations fréquentielles des signaux d'entrée et de sortie : filtres idéaux passifs

32. Compléter le tableau suivant en indiquant la nature du filtrage réalisé et son éventuel « idéalité » :

Système	Spectre du signal d'entrée	Spectre du signal de sortie	Nature du filtrage
A			filtre passe-bas idéal
B			filtre passe-bas non idéal ou « réel »
C			filtre passe-haut idéal

D			filtre passe-bande idéal
E			filtre coupe-bande (ou rejecteur de bande) idéal

On donne $f_1 = 100\ Hz$.
33. Pour le système A, indiquer la seule valeur de fréquence de coupure f_c possible parmi les suivantes :

$$f_c = 50\ Hz\ ;\ f_c = 150\ Hz\ ;\ f_c = 190\ Hz\ ;\ \boxed{f_c = 250\ Hz}\ ;\ f_c = 350\ Hz$$

34. Le système A possède-t-il la même fréquence de coupure f_c que le système B ?

Le système A ne possède pas la même fréquence de coupure f_c que le système B.
35. En déduire la bande passante ainsi que la largeur de la bande passante du système A :

$$[0\ ;250\ Hz] \text{ et } \Delta f = 250 - 0 = 250\ Hz$$

36. Pour le système C, indiquer la seule valeur de fréquence de coupure possible parmi les suivantes :

$$f_c = 50\ Hz\ ;\ f_c = 250\ Hz\ ;\ f_c = 390\ Hz\ ;\ \boxed{f_c = 450\ Hz}\ ;\ f_c = 550\ Hz$$

37. En déduire la bande passante ainsi que la largeur de la bande passante du système C :

$$[450\ ;+\infty[\text{ et } \Delta f\ impossible$$

38. Pour le système D, indiquer les seules valeurs de fréquence de coupure possible parmi les suivantes :

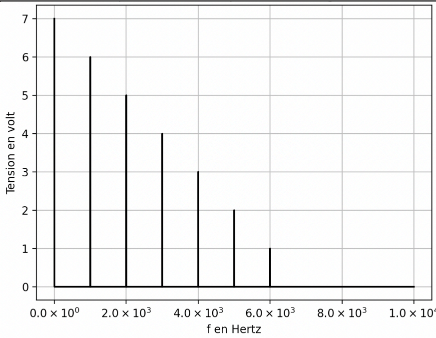
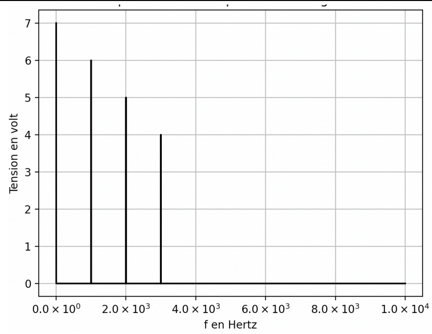
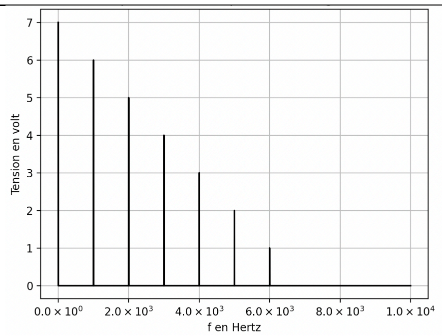
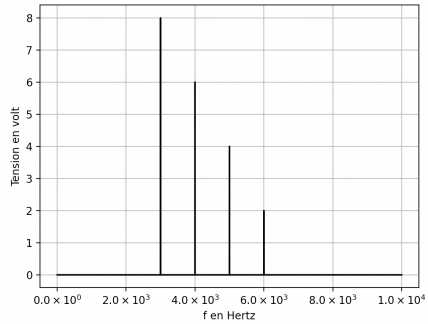
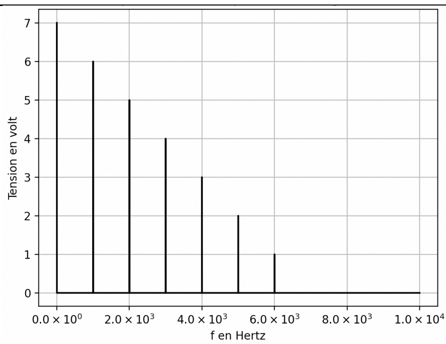
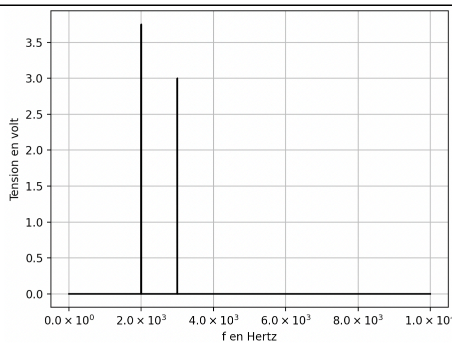
$$f_c = 50\ Hz\ ;\ \boxed{f_c = 130\ Hz}\ ;\ f_c = 250\ Hz\ ;\ \boxed{f_c = 327\ Hz}\ ;\ f_c = 430\ Hz$$

39. En déduire la bande passante ainsi que la largeur de la bande passante du système D :

$$[130\ Hz\ ;327\ Hz] \text{ et } \Delta f = 327 - 130 = 197\ Hz$$

❖ Amplification T_0 dans la bande passante du système :

40. Compléter le tableau suivant en indiquant le nom de T_0 ainsi que sa valeur :

Système	Spectre du signal d'entrée	Spectre du signal de sortie	Nom et valeur de T_0
A			Amplification statique Si on étudie le rang 2 : $T_0 = \frac{5}{5} = 1$
B			Amplification à hautes fréquences Si on étudie le rang 4 : $T_0 = \frac{6}{3} = 2$
C			Amplification dans la bande passante Si on étudie le rang 3 : $T_0 = \frac{3,0}{4} = 0,75$