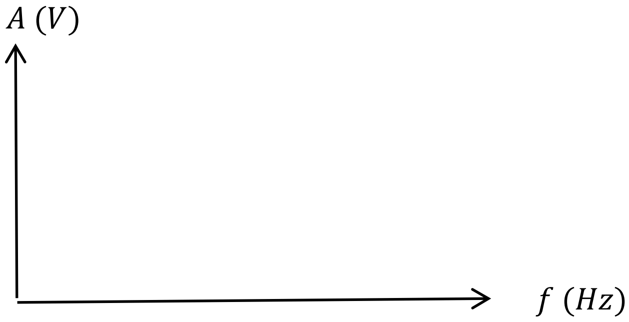
Chapitre 04
Représentations fréquentielles de signaux
Systèmes filtrants

<u>*Capacités exigibles :*</u>

- Savoir qu'un signal périodique peut se décomposer en une somme de sinusoïdes (IR)
- Savoir utiliser la décomposition d'un signal périodique en une somme de sinusoïdes ; relation temps fréquence entre les deux représentations (ER)
- Savoir analyser un spectre de raies : identification du fondamental, de l'harmonique de rang n.
- Savoir analyser le spectre d'un signal quelconque (encombrement spectral, présence de bruit, etc.)
- *Identifier un bruit blanc à l'aide de la densité spectrale de puissance (ER uniquement)*

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié et caractériser les signaux grâce à leur représentation temporelle. On peut aussi caractériser un signal grâce à sa représentation fréquentielle. Ce graphe est aussi appelé « spectre » du signal.

Représentation temporelle	Représentation fréquentielle
	
Ordonnée : valeur du signal, en volt ici Abscisse :	Ordonnée : amplitude/valeur, notée A, en volt Abscisse :

Important : dès qu'un graphe vous est proposé, il faut regarder quelle grandeur (ou quelle unité) est sur l'axe des ……………………

I. <u>Analyse de Fourier d'un signal périodique :</u>

Joseph Fourier (1768-1830) a introduit les séries qui portent son nom à propos d'une autre question de physique : la résolution de « l'équation de la chaleur ». Il étudiait la conduction thermique dans une barre cylindrique métallique, soumis à une différence de température à ses extrémités. Il cherchait à résoudre une équation différentielle et eut l'idée de proposer une solution sous forme d'une somme de cosinus et de sinus. Il a fallu près d'un siècle pour que ses travaux soient exploités dans d'autres domaines de la Physique.
Aujourd'hui, les travaux de Fourier sont utilisés dans de multiples domaines :

- en théorie du signal,
- en imagerie numérique (format JPEG)
- pour la compression de données (format MP3)
- dans l'exploitation des systèmes 4G, 5G.

Afin de comprendre les notions abordées, visionner la vidéo :
« Apprendre à exploiter un spectre en amplitude »

A. <u>Théorème de Fourier :</u>

- **Théorème de Fourier (à connaître par cœur) :**

- **Développement en série de Fourier d'un signal périodique :**

Tout signal périodique $u(t)$, de fréquence f_1 peut-être décomposé en une somme discrète :

avec f_n: fréquence du signal sinusoïdal alternatif de rang n, en hertz

A_n : amplitude du signal sinusoïdal alternatif de rang n, en volt

φ_n : phase à l'origine du signal sinusoïdal alternatif de rang n, en radiant

Les fréquences des différents signaux sinusoïdaux alternatifs sont reliées par la formule suivante :

Remarques :

- Ce théorème est valable quel que soit le motif du signal.
- Ce théorème peut s'appliquer à des signaux périodiques sous des conditions de régularité (fonction continue par morceaux), qui relève d'un cours de Mathématiques.

- **Composante continue et composante alternative d'un signal périodique :**

$$u(t) = \langle u \rangle + \underbrace{\mathrm{A}_1 \cos(2\pi f_1\, t + \varphi_1) + \mathrm{A}_2 \cos(2\pi f_2\, t + \varphi_2) + \mathrm{A}_3 \cos(2\pi f_3\, t + \varphi_3)}_{} + \cdots$$

B. Le fondamental et les harmoniques de la composante alternative d'un signal périodique :

❖ Qu'est-ce que le fondamental ? qu'est-ce qu'un harmonique ?

Soit la composante alternative d'un signal périodique alternatif, notée $u_{alt}(t)$, de fréquence f_1, superposition de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples entiers de f_1, telle que :

$$u_{alt}(t) = \underbrace{A_1 \cos(2\pi f_1\, t + \varphi_1)}_{} + \underbrace{A_2 \cos(2\pi f_2\, t + \varphi_2)}_{} + \underbrace{A_3 \cos(2\pi f_3\, t + \varphi_3)}_{} + \cdots$$

Signal sinusoïdal alternatif, de fréquence f_1, appelé	Signal sinusoïdal alternatif de fréquence $f_2 = 2f_1$, appelé	Signal sinusoïdal alternatif de fréquence $f_3 = 3f_1$, appelé

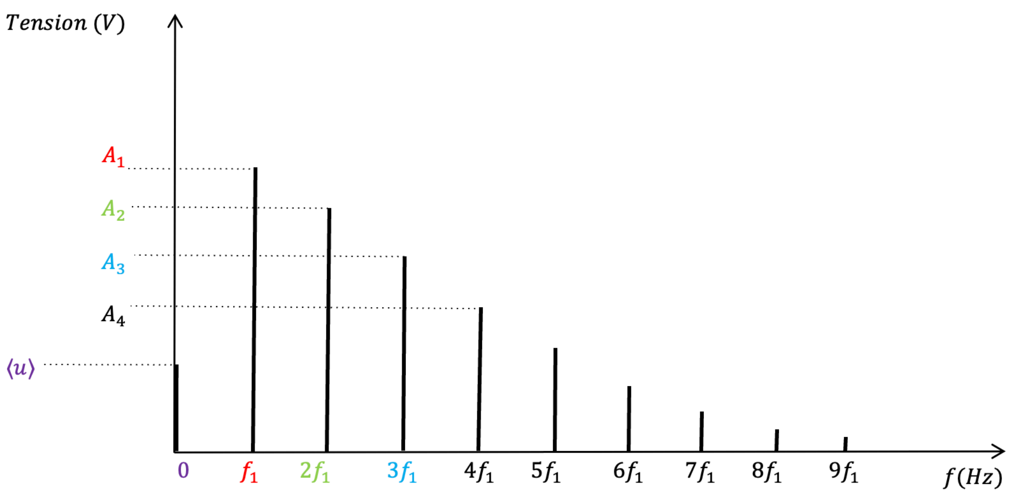
⚠

C. Apprendre à lire le spectre en amplitude d'un signal périodique :

Soit un signal périodique, dont la décomposition en série de Fourier est :

$$u(t) = \langle u \rangle + A_1 \cos(2\pi f_1\, t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2\, t + \varphi_2) + A_3 \cos(2\pi f_3\, t + \varphi_3) + \cdots$$

$$ou\ encore\ u(t) = \langle u \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi f_n\, t + \varphi_n)$$



Représentation fréquentielle (ou « spectre en amplitude »)

Chaque terme de cette somme est représenté par une raie dans le spectre en amplitude.

Seul le sommet de chaque raie a une réalité / un intérêt.

Pour des valeurs de n entières et non nulle :
Chaque raie d'abscisse nf_1 représente un harmonique du signal $u(t)$ (c'est-à-dire un signal sinusoïdal alternatif) de fréquence $f_n = nf_1$ et d'amplitude A_n.

- **Comment déterminer le rang d'un harmonique ?**

On utilise la formule : $f_n = n \times f_1 \Leftrightarrow n = \frac{f_n}{f_1}$

Sur un spectre, **il ne faut pas compter les raies pour déterminer le rang** !
Il faut déterminer la fréquence du fondamental, puis diviser la fréquence de l'harmonique par celle du fondamental : l'entier obtenu est le rang de l'harmonique.

$$n = \frac{f_n}{f_1}$$

- **Comment connaitre la forme du motif à partir d'une représentation fréquentielle ?**

Si le spectre du signal ne possède qu'une raie de fréquence non nulle, son motif est sinusoïdal.
Si le spectre du signal possède plusieurs raies de fréquences non nulles, son motif ne peut pas être déterminé.

L'harmonique de rang 1 (le « fondamental » du signal) impose sa fréquence f_1 au signal $u(t)$ observé sur la représentation temporelle.

D. Comment déterminer la fréquence du fondamental ?

Le fondamental n'est pas toujours la première raie visible (de fréquence non nulle) sur un spectre.

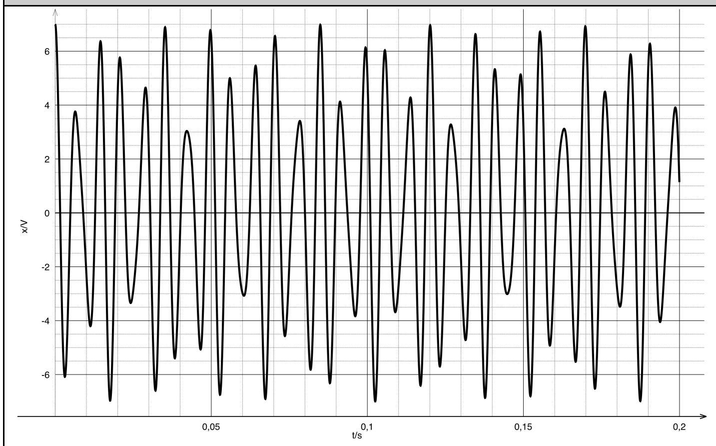
Remarque :
En Mathématiques, le PGCD est défini pour des nombres entiers : en Physique, la fréquence du fondamental peut-être un nombre décimal.

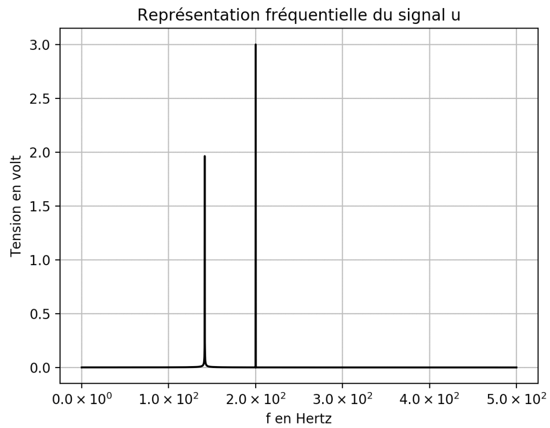
E. Si les fréquences des raies n'ont pas de plus grand commun diviseur :

On étudie le signal $u(t)$ dont l'expression numérique est la suivante :

$$x(t) = 2{,}0\cos\left(2\pi\sqrt{20000}t\right) + 3{,}0\cos(2\pi \times 200t)$$

On remarque que $200\ Hz$ n'est pas un multiple entier de $\sqrt{20000} = 141{,}4213562$ ... Il n'existe donc pas de plus grand commun diviseur entre $200\ Hz$ et $\sqrt{20000}\ Hz$.

<table>
<tr><th>Représentation temporelle</th><th>Représentation fréquentielle</th></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
</table>

Le signal $u(t)$ n'est pas périodique.
Le spectre est composé de deux raies discrètes (séparées par un espace) mais le signal n'est pas périodique. Ces deux raies ne sont alors pas nommées « harmoniques »
Ce cas est mathématiquement possible, mais n'est pas réalisable physiquement : un GBF ne peut pas générer une fréquence de $\sqrt{20000}\ Hz$.

II. Décomposition en série de Fourier de quelques signaux périodiques :

A. Cas du signal triangulaire :

Un signal $u(t)$ périodique, triangulaire, d'amplitude U_m ,de fréquence f_1 a pour développement en série de Fourier :

$$u(t) = \langle u \rangle + \frac{8U_m}{\pi^2} \times \cos(\, 2\pi f_1 t) + \frac{8U_m}{(3\pi)^2} \times \cos(\, 2\pi \times 3f_1 t) + \frac{8U_m}{(5\pi)^2} \times \cos(\, 2\pi \times 5f_1 t) + \cdots$$

ou encore

$$u(t) = \langle u \rangle + \sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} \frac{8U_m}{((2k+1)\pi)^2} \times \cos(\, 2\pi \times (2k+1) \times f_1 \times t)\ \ avec\ k\ \in \mathbb{N}$$

Remarque :

Si on lit/utilise l'égalité (de gauche à droite) $u(t) = \langle u \rangle + \sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} \frac{8U_m}{((2k+1)\pi)^2} \times \cos(\, 2\pi \times (2k+1)f_1 t)$, on parle de décomposition ou d'analyse de Fourier.

Si on lit la même égalité mais dans l'autre sens, $\langle u \rangle + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8U_m}{((2k+1)\pi)^2} \times \cos(\,2\pi \times (2k+1)f_1 t) = u(t)$, on parle de recomposition ou de synthèse de Fourier.

B. Cas du signal carré :

> Un signal $u(t)$ périodique, carré, d'amplitude U_m , de fréquence f_1 a pour développement en série de Fourier :
>
> $$u(t) = \langle u \rangle + \frac{4U_m}{\pi} \times \cos\left(2\pi f_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4U_m}{3\pi} \times \cos\left(2\pi \times 3f_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4U_m}{5\pi} \times \cos\left(2\pi \times 5f_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \cdots$$
>
> ou encore
>
> $$u(t) = \langle u \rangle + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4U_m}{(2k+1)\pi} \times \cos\left(2\pi \times (2k+1) \times f_1 \times t - \frac{\pi}{2}\right) \; avec\ k \in \mathbb{N}$$

Remarque :
Pour les signaux que nous venons de citer, l'amplitude des harmoniques décroit à mesure que leur ordre augmente.

C. Encombrement spectral d'un signal :

❖ **Qu'est-ce que l'encombrement spectral d'un signal ?**

> L'encombrement spectral d'un signal correspond à la valeur de l'étendue en fréquence qu'occupe l'ensemble des raies du signal. Il est noté Δf, et son unité est le Hertz, noté Hz
>
> $$\Delta f = f_{max} - f_{min}$$
>
> f_{max} : fréquence de l'harmonique de plus haut rang du signal (ou de la raie de plus grande fréquence), ayant une amplitude non nulle, en Hertz
> f_{min} : fréquence de la raie de plus basse fréquence, ayant une amplitude non nulle, en Hertz.

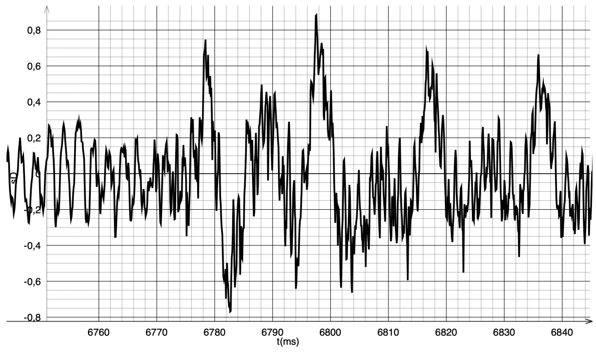
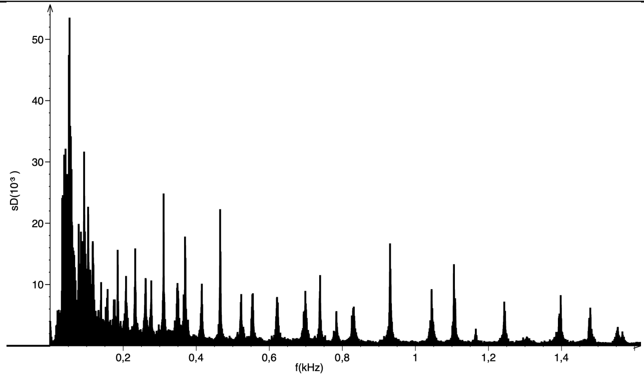
❖ **Qu'est-ce que l'encombrement spectral à X % d'un signal ?**

> On étudie un signal périodique d'amplitude U_m .
> L'encombrement spectral à X% d'un signal correspond à la valeur de l'étendue en fréquence suivante :
>
> $$\Delta f = f_{max,X\%} - f_{min}$$
>
> $f_{max,X\%}$: fréquence (en Hertz) de l'harmonique du signal (ou de la raie), ayant une amplitude **juste supérieure à la valeur** $\boldsymbol{\frac{X}{100} \times U_m}$
> f_{min} : fréquence de la raie de plus basse fréquence, ayant une amplitude non nulle, en Hertz.

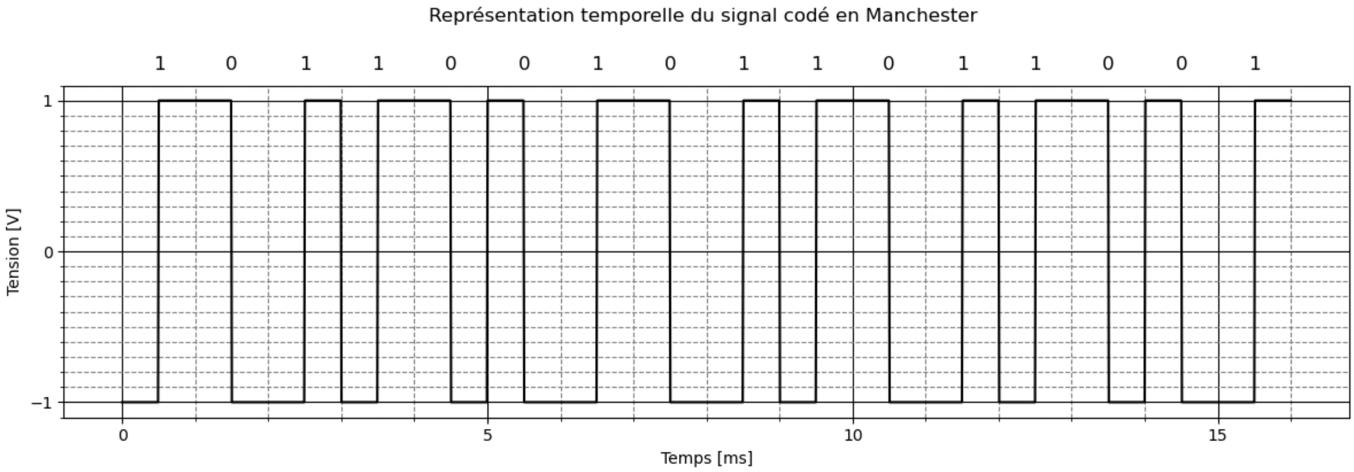
III. Représentation fréquentielle d'un signal variable, non périodique :

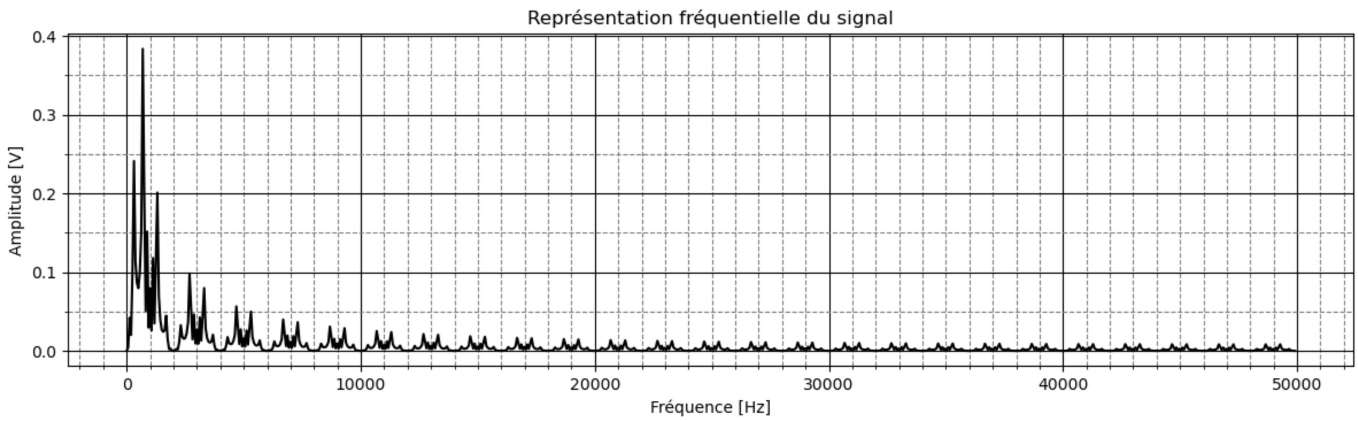
La grande majorité des signaux sont variables mais ne sont pas périodiques.

Exemple : extrait d'un morceau de musique

Signal sonore	Représentation temporelle	Représentation fréquentielle
Instant Crush (Daft Punk)		

Exemple : un signal binaire avec le code de Manchester





❖ Continuité du spectre d'un signal non périodique :

Spectre avec des raies discrètes (raies séparées par un espace « vide ») $\Leftrightarrow$ signal périodique Spectre avec une continuité de raies $\Leftrightarrow$ signal non périodique

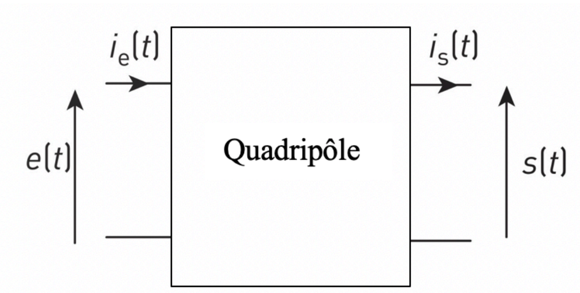
Conséquence :

Un signal non périodique ne possède donc ni fondamental, ni harmonique de fréquence multiples entiers de celle du fondamental.

Remarque :
Afin d'obtenir le spectre de signaux non périodiques, on n'exploite plus la décomposition en série de Fourier. On utilise les transformations de Fourier.

IV. Caractériser un système linéaire :

❖ Qu'est-ce qu'un système linéaire ?



Un système est linéaire si l'équation liant $e(t)$ et $s(t)$ vérifie les principes : • de proportionnalité : si on multiplie par un nombre k le signal d'entrée $e(t)$, le signal de sortie devient alors $k \times s(t)$ • de superposition : si $s_1(t)$ est la réponse au signal d'entrée $e_1(t)$ et $s_2(t)$ est la réponse au signal d'entrée $e_2(t)$ alors $s_1(t) + s_2(t)$ est la réponse au signal d'entrée $e_1(t) + e_2(t)$

A. Un système linéaire peut être un filtre, actif ou passif :

Définition : qu'est-ce qu'un filtre ?

Qu'est-ce qu'un filtre passif ? actif ?

Un système électrique linéaire est un filtre dit **passif** s'il n'est constitué uniquement que de **dipôles passifs** :
- conducteurs ohmiques de résistance R, dont l'unité est l'ohm, noté Ω.
- condensateurs de capacité C, dont l'unité est le Farad, noté F.
- bobines d'inductance L dont l'unité est le Henry, noté H.

Un système électrique linéaire est un filtre dit **actif** s'il possède **un ou plusieurs éléments actifs** : transistors bipolaires ou à effet de champ, amplificateurs linéaires intégrés (en plus des dipôles passifs usuels R, C et plus rarement L).

Un dipôle passif ne nécessite pas d'alimentation extérieure (apport d'énergie électrique) pour pouvoir fonctionner, contrairement à un élément actif.

B. Quelles sont les différentes natures de filtrages possibles pour un système ?

a. Les systèmes « passe-bas » et « passe-haut » :

❖ **Fréquence de coupure d'un système passe-bas ou passe-haut :**

Un système possédant une nature de filtrage « passe-bas » ou « passe-haut », est caractérisé par sa fréquence de coupure, notée f_C . Cette fréquence de coupure est **propre à chaque système** : il s'agit d'une **grandeur caractéristique du système** étudié.
La valeur de la fréquence de coupure f_C d'un système dépend des éléments constituant ce système.

⚠ Ne pas confondre la fréquence du signal d'entrée (et de ses harmoniques) et la fréquence de coupure f_C du système étudié.

Qu'appelle-t-on « hautes fréquences » ou « basses fréquences » pour un système ?
Lorsque la fréquence d'un harmonique du signal d'entrée est plus grande que la fréquence de coupure f_C du système, on parle de « hautes fréquences » **pour ce système.**
Lorsque la fréquence d'un harmonique du signal d'entrée est plus faible que la fréquence de coupure f_C du système, on parle de « basses fréquences » **pour ce système.**

❖ **Qu'est-ce qu'un système « passe-bas » ?**

Un système linéaire possède une nature de filtrage nommée **« passe-bas »** si :
- il ne modifie pas (laisse passer) les amplitudes des harmoniques de basses fréquences et atténue les amplitudes des harmoniques de hautes fréquences,
- il atténue les amplitudes des harmoniques de basses fréquences et atténue davantage les amplitudes des harmoniques de hautes fréquences,
- il amplifie les amplitudes des harmoniques de basses fréquences davantage que les amplitudes des harmoniques de hautes fréquences.

Application :
Ce type de filtrage est présent dans une enceinte afin que les basses fréquences du son (les « graves ») soient envoyées sur le haut-parleur de grande dimension.

❖ **Qu'est-ce qu'un système « passe-haut » ?**

Un système linéaire possède une nature de filtrage nommée « **passe-haut** » si :
- il ne modifie pas (laisse passer) les amplitudes des harmoniques de hautes fréquences et atténue les amplitudes des harmoniques de basses fréquences,
- il atténue les amplitudes des harmoniques de hautes fréquences et atténue davantage les amplitudes des harmoniques de basses fréquences,
- il amplifie les amplitudes des harmoniques de hautes fréquences davantage que les amplitudes des harmoniques de basses fréquences

Application :
Ce type de filtrage permet l'élimination de la composante continue d'un signal.

❖ **Bande-passante des systèmes passe-haut ou passe-bas :**

	Filtrage passe-bas	Filtrage passe haut
Bande passante	$[0\,;f_C]$	$[f_C\,;+\infty[$
Largeur de la bande passante	$\Delta f = f_C - 0 = f_C$	La largeur de bande passante n'est pas définie.

b. Les systèmes « passe-bande » :

❖ **Fréquences de coupure d'un système passe-bande :**

Un système possédant une nature de filtrage « passe-bande » est caractérisé par **deux fréquences de coupure**, notées $f_{c,min}\ et\ f_{c,max}$. Ces fréquences de coupure sont **propres à chaque système** : il s'agit de **grandeurs caractéristiques** du système étudié.
Leur valeur dépend des éléments constituant ce système.

Lorsque la fréquence d'un harmonique du signal d'entrée est plus grande que $f_{c,max}$, on parle de « hautes fréquences » **pour ce système.**
Lorsque la fréquence d'un harmonique du signal d'entrée est plus faible que $f_{c,min}$, on parle de « basses fréquences » **pour ce système.**

❖ Qu'est-ce qu'un système « passe-bande » ?

Un système linéaire possède une nature de filtrage nommée « **passe-bande** » si :
- il ne modifie pas (laisse passer) les amplitudes des harmoniques dont la fréquence est comprise entre $[f_{c,min}\,;\ f_{c,max}]$ et atténue les amplitudes des autres harmoniques,
- il atténue les amplitudes des harmoniques dont la fréquence est comprise entre $[f_{c,min}\,;\ f_{c,max}]$ et atténue davantage les amplitudes des autres harmoniques,
- il amplifie les amplitudes des harmoniques dont la fréquence est comprise entre $[f_{c,min}\,;\ f_{c,max}]$ davantage que les amplitudes des autres harmoniques.

Application :
Ce type de filtrage permet de sélectionner la station FM souhaitée dans les récepteurs radios.

❖ Bande passante d'un système passe-bande :

On appelle bande passante d'un système « passe-bande », l'intervalle suivant : $[f_{c,min}\,;\ f_{c,max}]$
On appelle largeur de la bande passante de ce système, la grandeur suivante :

$$\Delta f = f_{c,max} - f_{c,min}$$

Remarque :
Si le signal d'entrée est non périodique (son spectre est continu et est constitué d'une infinité de signaux sinusoïdaux alternatifs) et si le système est toujours linéaire, notre étude pourra toujours s'appliquer.

C. Amplification T_0 dans la bande passante du système :

Définition de l'amplification T_0 : à connaitre

On note T_0, l'amplification de l'amplitude des harmoniques dont la fréquence est comprise dans la bande passante du système.
T_0 représente le rapport de l'amplitude d'un harmonique du signal de sortie, **dont la fréquence est comprise dans la bande passante du système**, sur l'amplitude de ce même harmonique en entrée du système.

$$T_0 = \frac{A_{n,S}}{A_{n,E}}$$

$A_{n,E}$: amplitude de l'harmonique de rang n en entrée du système, dont la fréquence est comprise dans la bande passante du système, en Volt
$A_{n,S}$: amplitude de l'harmonique de rang n en sortie du système, dont la fréquence est comprise dans la bande passante du système, en Volt
T_0 : amplification dans la bande passante, sans unité.

Vocabulaire : à connaitre

Pour un système « passe-bas », T_0 est appelé « amplification statique » ou « amplification à basses fréquences » du système.
Pour un système « passe-haut », T_0 est appelé « amplification à hautes fréquences » du système.
Pour un système « passe-bande », T_0 est appelé « amplification dans la bande passante » du système.

Sens physique :

Si $|T_0| = 1$ alors le système ne modifie pas les amplitudes des harmoniques du signal d'entrée, dont la fréquence est comprise dans la bande passante du système.

Si $|T_0| < 1$ alors le système atténue les amplitudes des harmoniques du signal d'entrée, dont la fréquence est comprise dans la bande passante du système.

Si $|T_0| > 1$ alors le système amplifie les amplitudes des harmoniques du signal d'entrée, dont la fréquence est comprise dans la bande passante du système.

Important :
L'apport d'énergie extérieur dans un système actif, a en général, pour but d'amplifier des harmoniques mais il se peut que la structure du système actif ne le permette pas.

Un système actif peut amplifier ($|T_0| > 1$) l'amplitude des harmoniques du signal d'entrée, dont la fréquence est comprise dans la bande passante du système, comme il peut ne pas les amplifier ($|T_0| \leq 1$) .

L'absence d'apport d'énergie extérieur dans un système passif, pourrait laisser croire qu'il est impossible d'amplifier l'amplitude des harmoniques : or, en exploitant le « phénomène de résonance », un système passif peut amplifier l'amplitude des harmoniques, sans apport extérieur d'énergie.

Un système passif peut amplifier ($|T_0| > 1$) l'amplitude des harmoniques du signal d'entrée, dont la fréquence est comprise dans la bande passante du système, comme il peut ne pas les amplifier ($|T_0| \leq 1$) .

Chapitre 04 - Ce qu'il faut savoir :

- Savoir qu'un signal périodique est la somme d'une composante continue et d'une composante alternative périodique.
- Énoncer par cœur le théorème de Fourier.
- Savoir que la fréquence du fondamental est le PGCD des fréquences des harmoniques.
- Savoir que le fondamental n'est pas la première raie visible d'un spectre.
- Savoir que le spectre d'un signal non périodique est continu
- Connaitre la définition d'un système linéaire
- Connaitre la définition d'un système passif/actif
- Connaitre la définition d'un filtre passe-bas, passe-haut et passe-bande.
- Connaitre les noms donnés à T_0 selon la nature du filtrage

Chapitre 04 - Ce qu'il faut savoir-faire :

- Utiliser les termes « fondamental » et « harmoniques » : savoir relier les fréquences des harmoniques à celle du fondamental.
- Savoir déterminer la valeur moyenne d'un signal périodique quelconque à l'aide d'un spectre en amplitude.
- Savoir déterminer le rang d'un harmonique à partir d'un spectre
- Savoir déterminer les amplitudes et les fréquences des harmoniques d'un signal périodique quelconque à l'aide d'un spectre en amplitude.
- Savoir tracer un spectre en amplitude à partir de l'expression temporelle numérique du signal.
- Savoir calculer les amplitudes des harmoniques dans le cas de signaux carré ou triangulaire.
- Savoir déterminer la valeur d'un encombrement spectral
- Être capable de fournir une expression temporelle possible à partir d'un spectre en amplitude.
- Savoir reconnaitre un système actif d'un système passif.
- Savoir reconnaitre la nature d'un filtrage en comparant des spectres entrée/sortie
- Savoir déterminer l'amplification T_0 en comparant des spectres entrée/sortie
- Savoir déterminer la fréquence de coupure d'un filtre en comparant des spectres entrée/sortie
- Savoir déterminer la bande passante et la largeur de la bande passante d'un filtre en comparant des spectres entrée/sortie.