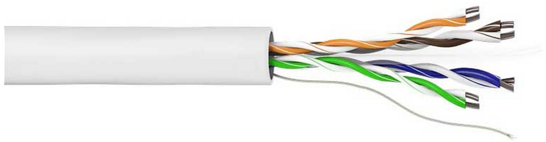
Chapitre 06 – Numérisation d'une tension

Activités et applications

❖ Activité introductive : pourquoi doit-on numériser des tensions analogiques ?

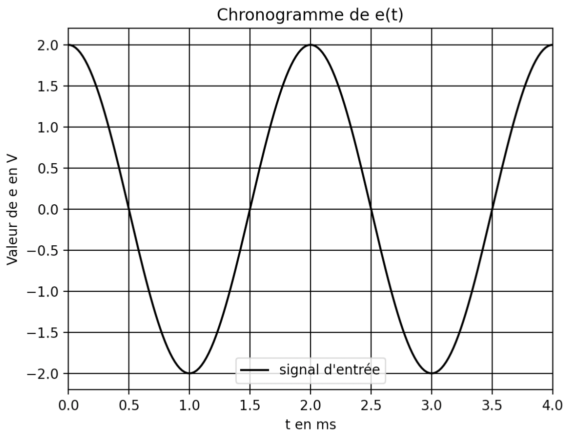


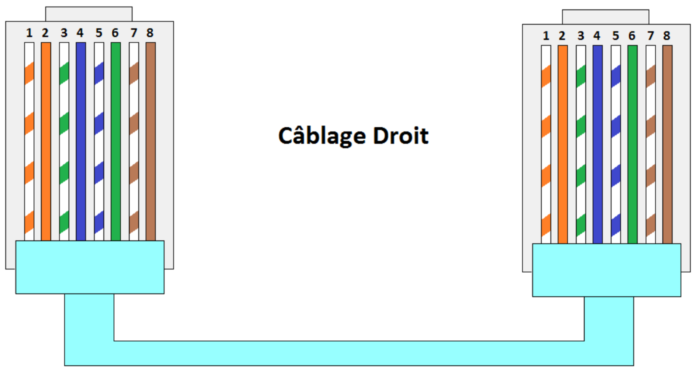
Modèle U/UTP

On étudie la transmission dans un câble ETHERNET *U/UTP* d'une information.

Les 4 paires de fils sont torsadées et non blindées individuellement avec une feuille d'aluminium.
Il n'y a pas non plus de blindage général du câble.

Dans un premier temps, l'information que l'on souhaite transmettre est une tension analogique, sinusoïdale alternative, notée $e(t)$. Cette tension est envoyée sur la paire orange (1- 2).



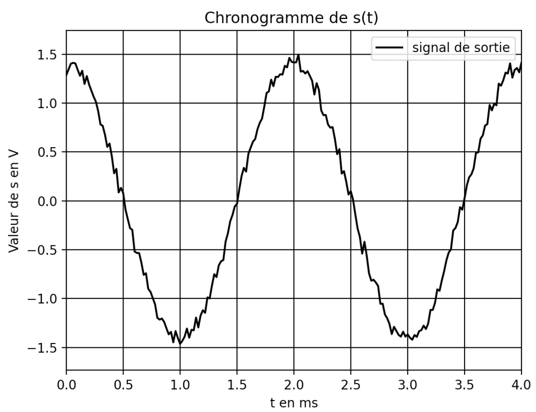


1. Tracer les flèches représentant la tension $e(t)$ et la tension de sortie $s(t)$ sur le schéma du câble ETHERNET.

2. Quel est le système étudié ici ?

3. Quelle est l'allure souhaitée du signal en sortie du câble ?

Le chronogramme du signal de sortie $s(t)$ est donné ci-dessous :

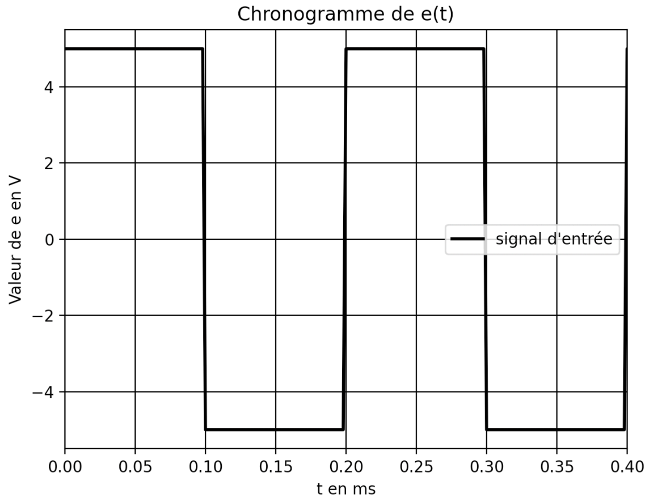


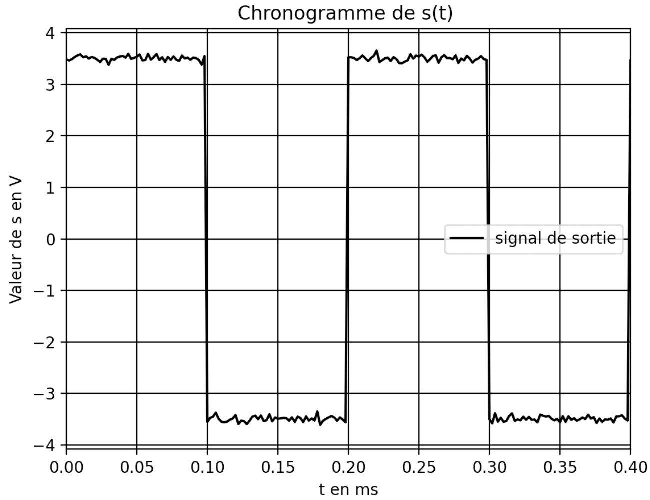
4. Quel(s) phénomène(s) ont lieu lors de la transmission du signal dans le système ?

5. Comment peut-on éliminer les parasites électromagnétiques ?

6. Peut-on éliminer l'atténuation de l'information et l'ajout du bruit par-dessus cette information ?

A présent, l'information que l'on souhaite transmettre dans ce même câble, est un signal numérique codé en binaire. On donne ci-dessous les chronogrammes du signal d'entrée $e(t)$ et du signal de sortie $s(t)$.





On utilise ici un codage « NRZ » :

- l'état haut (tension positive) code l'état logique 1,
- l'état bas (tension négative) code l'état logique 0.

La durée d'un bit (« rythme d'horloge ») est de $0{,}05\ ms$.

7. A l'aide du chronogramme du signal d'entrée, indiquer le code binaire envoyé à l'entrée de la paire torsadée :

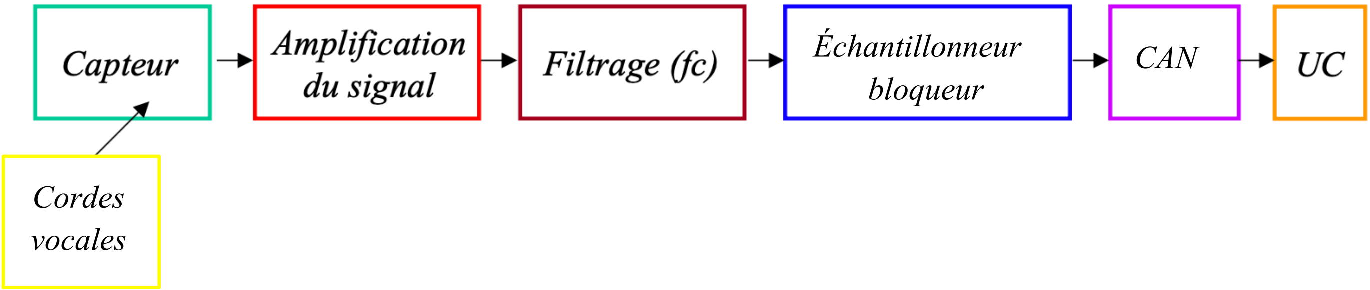
8. A l'aide du chronogramme du signal de sortie, indiquer le code binaire reçu à la sortie de la paire torsadée :

9. L'information a-t-elle dégradée lors de sa transmission dans le câble ?

10. Citer d'autres avantages de la numérisation des signaux analogiques.

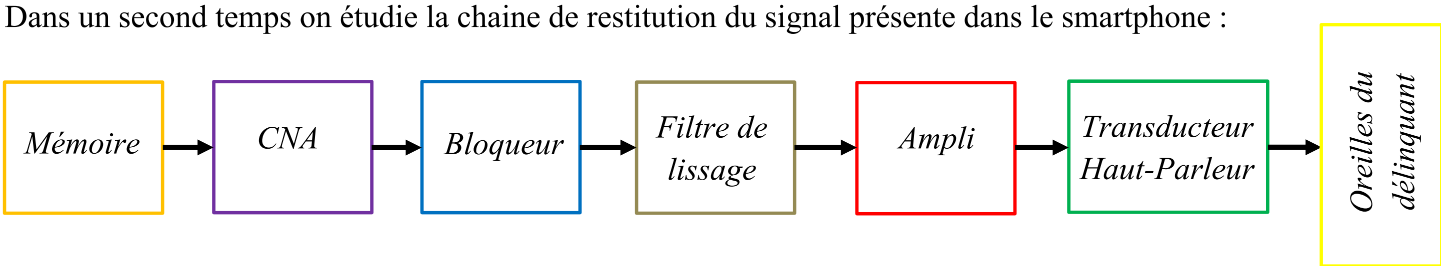
❖ Une première chaine de numérisation d'un signal sonore :

Beyoncé enregistre actuellement son prochain album, au studio A110.
Dans un premier temps, on étudie la chaine de numérisation présente dans le studio A110 :



11. Compléter à l'aide du vocabulaire suivant le schéma fonctionnel (partiel) de la chaine de numérisation : signal sonore, signal électrique analogique, signal échantillonné et bloqué, code binaire.

Un extrait de l'un des morceaux (ou « snippet » en anglais) a fuité et est disponible en ligne. L'internaute, dont le pseudo est @PhysicisbetterthanBeyonce, télécharge puis écoute sur son smartphone l'extrait, en toute illégalité.
Dans un second temps on étudie la chaine de restitution du signal présente dans le smartphone :



12. Compléter à l'aide du vocabulaire suivant le schéma fonctionnel (partiel) de la chaine de restitution : signal sonore, signal électrique analogique, signal échantillonné et bloqué, signal numérique, code binaire.

13. Comment doivent-être idéalement, les deux signaux sonores situés en début de chaine de numérisation et en sortie de chaine de restitution ?

❖ Fréquence et période d'échantillonnage :

14. La fréquence d'échantillonnage est $f_e = 2{,}00\ kHz$. Déterminer la valeur de la période d'échantillonnage T_e (en milliseconde) :

❖ Profondeur de mémoire d'un numériseur :

L'oscilloscope AGILENT possède une profondeur de mémoire de $14\,Mpts$ par voie et une fréquence d'échantillonnage $f_e = 1\ GHz$.

15. Quelle durée totale d'acquisition est capable de numériser cet oscilloscope ?

16. Sur quel paramètre doit-on jouer afin d'augmenter la durée totale d'acquisition de l'oscilloscope ?

❖ Nombre moyen d'échantillons par motif (si le signal analogique est périodique) :

17. Pour l'oscilloscope AGILENT à une fréquence $f_e = 1\ GHz$, calculer le nombre d'échantillons par motif si le signal analogique a pour fréquence $f = 100\ Hz$.

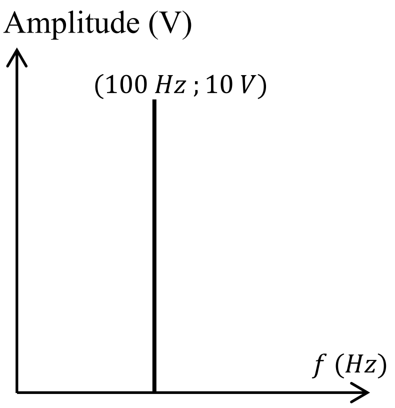
18. Pour l'oscilloscope AGILENT à une fréquence $f_e = 1\ GHz$, calculer le nombre d'échantillons par motif si le signal analogique a pour fréquence $f = 150\ Hz$.

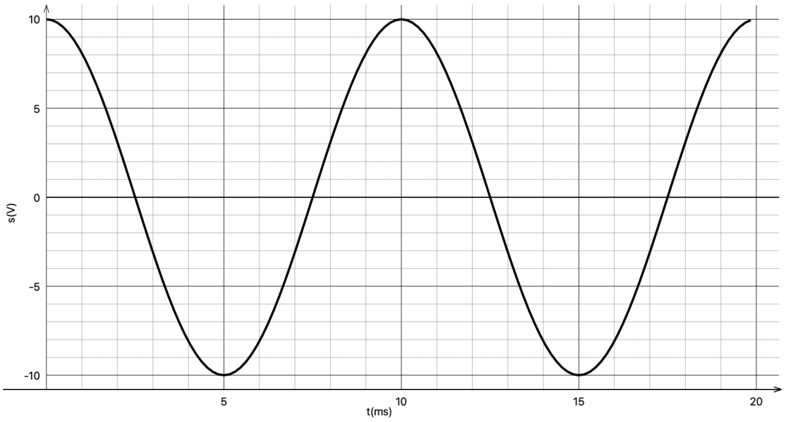
N est un nombre moyen d'échantillons par motif : il peut donc ne pas être entier.

19. Commenter les valeurs des nombres moyens d'échantillons par motif obtenues :

❖ Spectre du signal échantillonné $s_e(t)$: simulation sur Python

Le signal analogique $s(t)$ est sinusoïdal alternatif de fréquence $f = 100\ Hz$ (donc de période $T = \frac{1}{100} = 1{,}0 \times 10^{-2} s$) et d'amplitude $U_m = 10{,}0\ V$. Son spectre en amplitude est donc celui tracer à gauche.

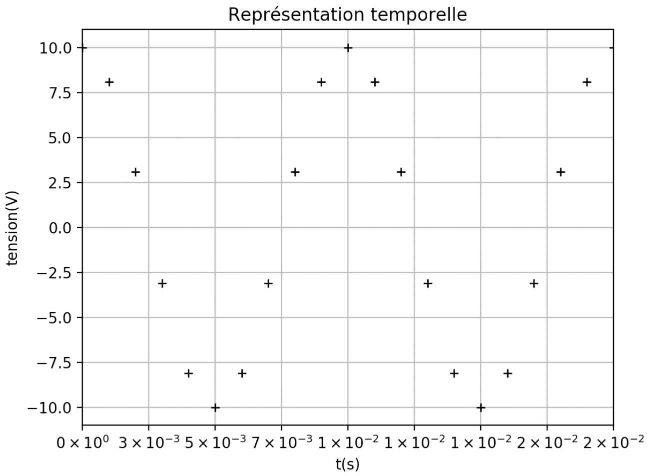
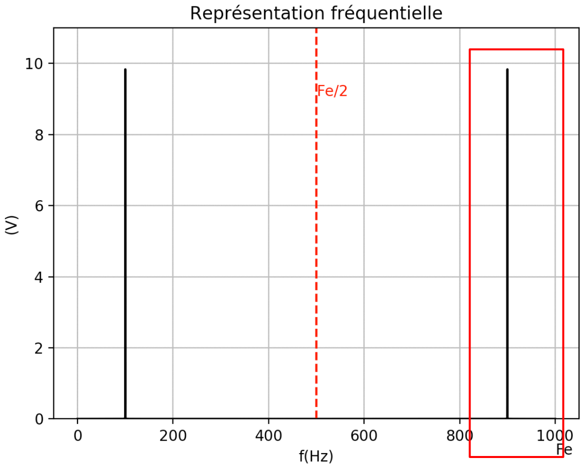


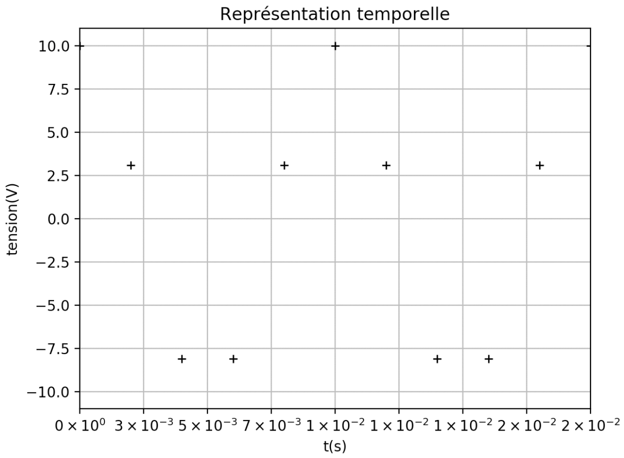


A l'aide d'une carte d'acquisition SYSAM-SP5 et de code Python, on réalise l'échantillonnage du signal analogique et obtient les représentations suivantes pour différentes fréquences f_e.

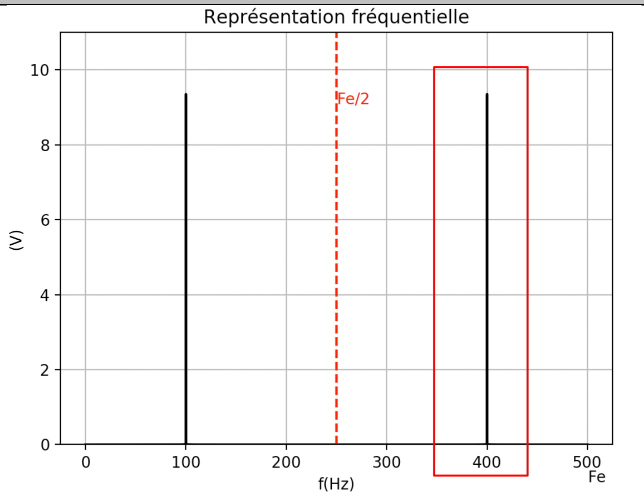
La fonction FFT ne trace le spectre du signal que dans un intervalle de fréquence restreint (entre $0 \ et \ f_e$)

20. Pour chaque valeur de f_e, compléter le tableau ci-après.
21. Sur chaque spectre, entourer en rouge la raie du spectre relevant de l'échantillonnage.

Représentation temporelle de s_e pour $f_e = 1{,}000 \ kHz$	Représentation fréquentielle de s_e pour $f_e = 1{,}000 \ kHz$
 Période et fréquence du signal échantillonné s_e: $T = 1{,}0 \times 10^{-2} s$ donc $f = \frac{1}{T} = 100 \ Hz$ Amplitude du signal échantillonné s_e: $U_m = 10 \ V$	 Amplitude des raies : Fréquence des raies : La fréquence f correspond-elle à celle observée sur la représentation temporelle ?

<table>
<tr><th>Représentation temporelle de s_e
pour $f_e = 500\ Hz$</th><th>Représentation fréquentielle de s_e
pour $f_e = 500\ Hz$</th></tr>
<tr><td>


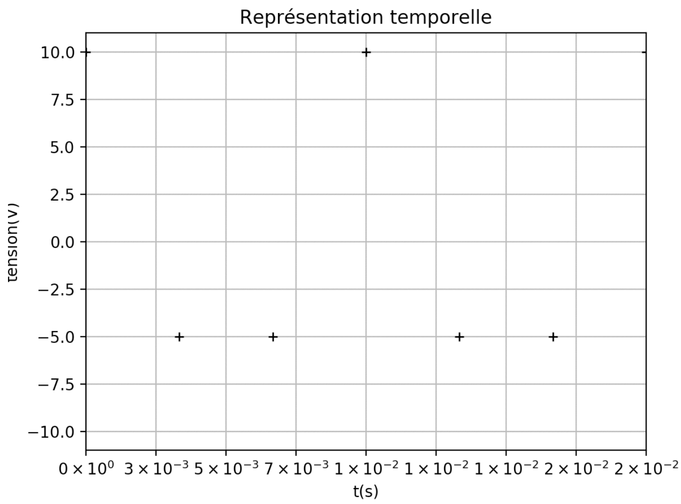
Période et fréquence du signal échantillonné s_e:
$T = 1{,}0 \times 10^{-2} s$ donc $f = \frac{1}{T} = 100\ Hz$

Amplitude du signal échantillonné s_e:
$U_m < 10\ V$
</td><td>


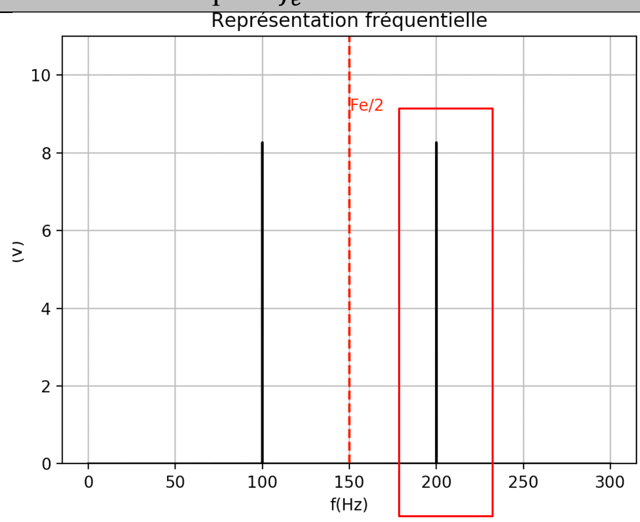
Amplitude des raies :

Fréquence des raies :

La fréquence f correspond-elle à celle observée sur la représentation temporelle ?
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Représentation temporelle de s_e
pour $f_e = 300\ Hz$</th><th>Représentation fréquentielle de s_e
pour $f_e = 300\ Hz$</th></tr>
<tr><td>


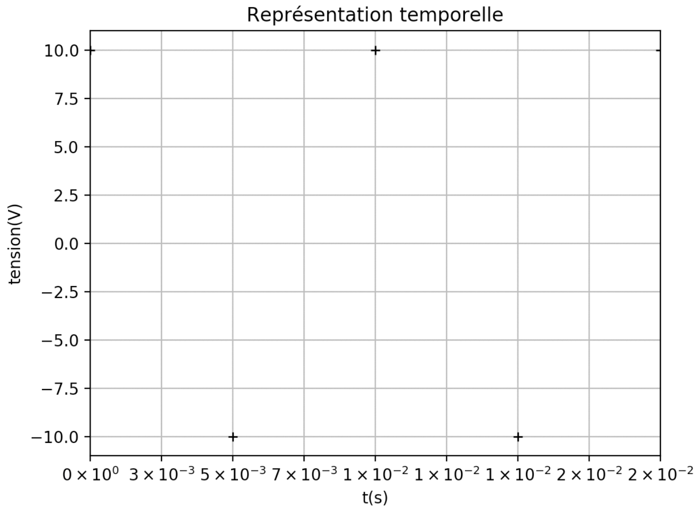
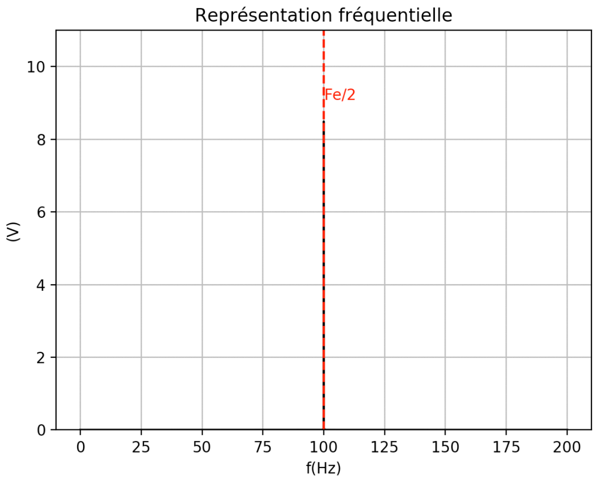
Période et fréquence du signal échantillonné s_e:
$T = 1{,}0 \times 10^{-2} s$ donc $f = \frac{1}{T} = 100\ Hz$

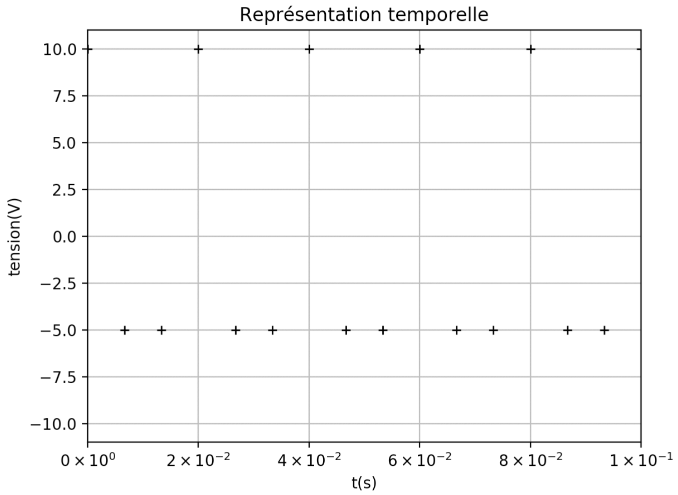
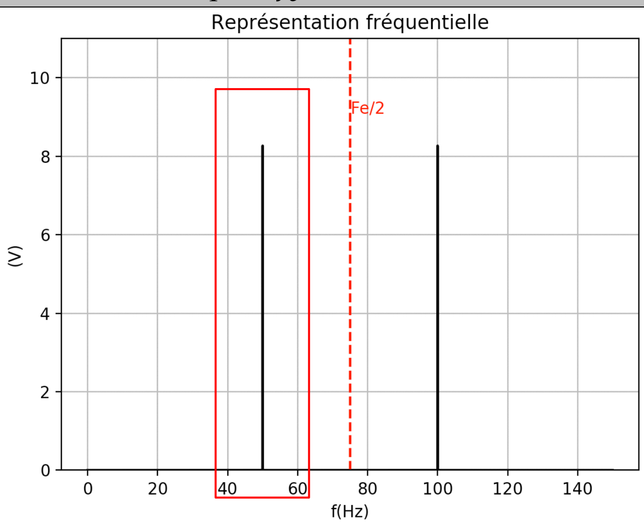
Amplitude du signal échantillonné s_e:
$U_m < 10\ V$
</td><td>


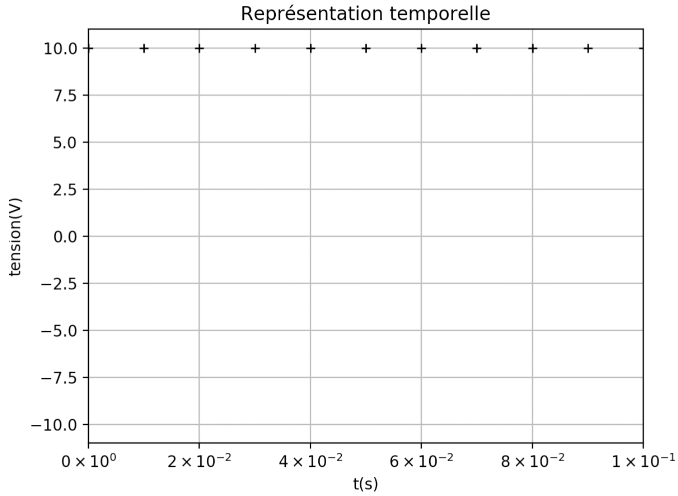
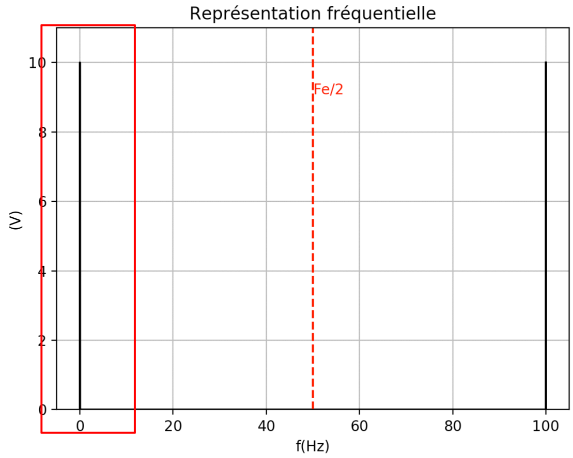
Amplitude des raies :

Fréquence des raies :

La fréquence f correspond-elle à celle observée sur la représentation temporelle ?
</td></tr>
</table>

Représentation temporelle de s_e pour $f_e = 200\ Hz$	Représentation fréquentielle de s_e pour $f_e = 200\ Hz$
 Période et fréquence du signal échantillonné s_e: $T = 1{,}0 \times 10^{-2} s$ donc $f = \frac{1}{T} = 100\ Hz$ Amplitude du signal échantillonné s_e: $U_m = 10\ V$	 Amplitude des raies : Fréquence des raies : La fréquence f correspond-elle à celle observée sur la représentation temporelle ?

Représentation temporelle de s_e pour $f_e = 150\ Hz$	Représentation fréquentielle de s_e pour $f_e = 150\ Hz$
 Période et fréquence du signal échantillonné s_e: Amplitude du signal échantillonné s_e: $U_m < 10\ V$	 Amplitude des raies : Fréquence des raies : La fréquence f correspond-elle à celle observée sur la représentation temporelle ?

Représentation temporelle de s_e pour $f_e = 100\ Hz$	Représentation fréquentielle de s_e pour $f_e = 100\ Hz$
 Période et fréquence du signal échantillonné s_e: Amplitude du signal échantillonné s_e:	 « Amplitude » des raies : Fréquence des raies : La fréquence f correspond-elle à celle observée sur la représentation temporelle ?

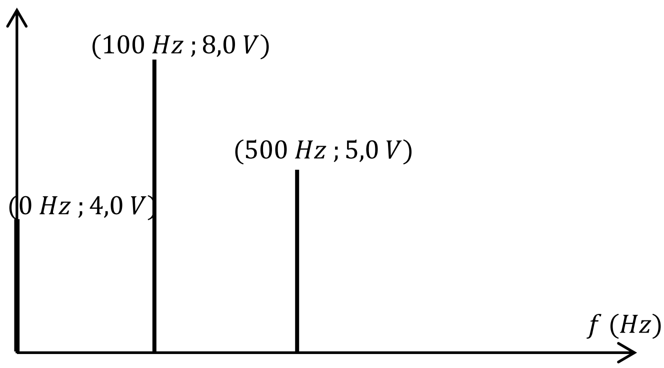
22. En déduire la formule mathématique donnant f' en fonction de $f\ et\ f_e$:

❖ Condition de réversibilité de l'échantillonnage du signal analogique sinusoïdal alternatif :

23. Pour $f_e = 1\ kHz$, quel type de filtre peut-on utiliser afin de restituer le signal analogique à partir du signal échantillonné ? Dans quel intervalle doit-être sa fréquence de coupure ?

24. A partir de quelle valeur de f_e, le filtre proposé précédemment ne permet-il plus de restituer le signal analogique $s(t)$?

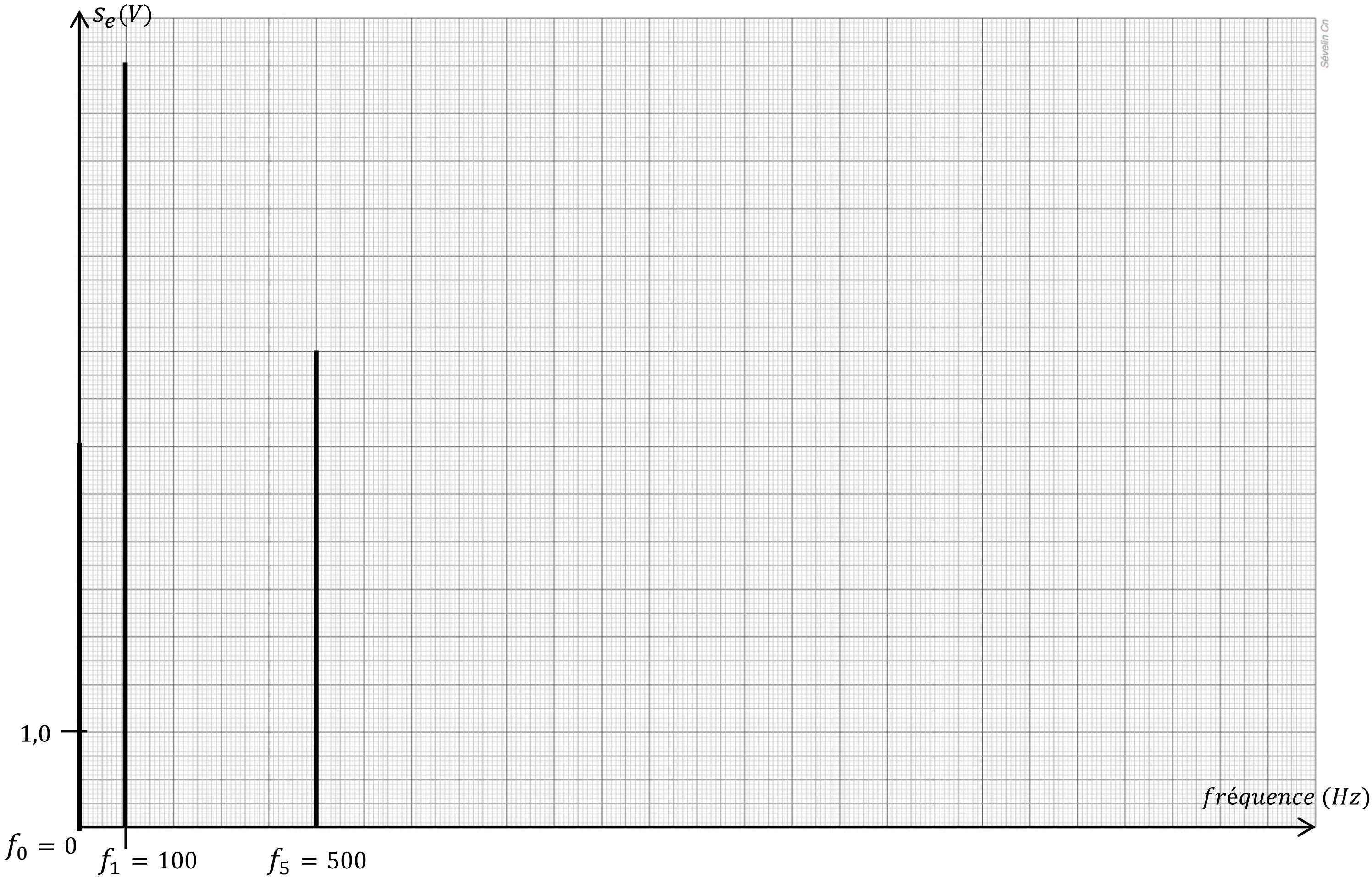
❖ Échantillonnage d'un signal dont le spectre est limité en fréquence :



On étudie un signal analogique $s(t)$ de fréquence $f = 100\ Hz$. Son spectre en amplitude est celui tracé à gauche.

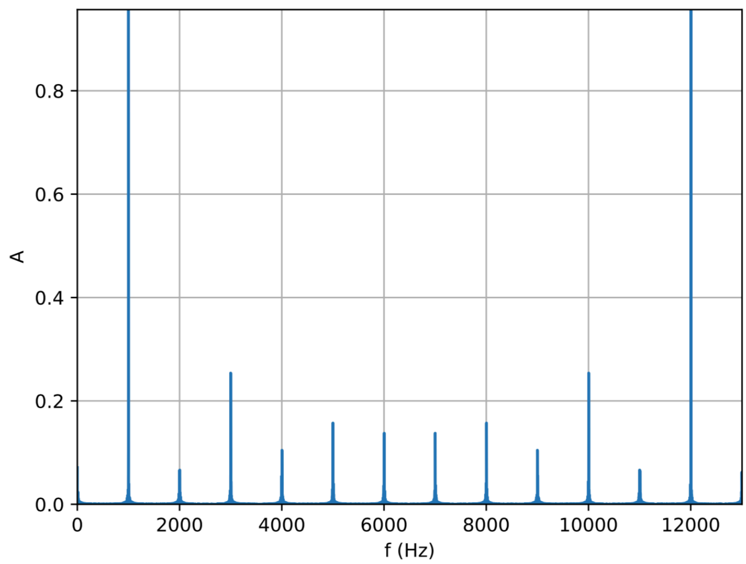
25. Choisir parmi les valeurs suivantes, une fréquence d'échantillonnage permettant d'obtenir un échantillonnage correct du signal analogique $s(t)$:
$f_e = 50\ Hz$; $f_e = 500\ Hz$; $f_e = 750\ Hz$
$f_e = 850\ Hz$; $f_e = 950\ Hz$; $f_e = 1500\ Hz$

26. Sur le graphe suivant, tracer le spectre du signal échantillonné s_e :



Cas du signal carré :

On échantillonne un signal analogique carré de fréquence $f = 1{,}0\ kHz$. Le signal échantillonné possède le spectre en amplitude suivant :



27. Entourer en rouge, les harmoniques du signal analogique d'origine.
28. Entourer en vert, les raies ayant pour abscisses $f_e - f_n$. On rappelle que $f_n = n \times f_1$
29. Quels harmoniques subissent un repliement ?

30. Proposer une fréquence de coupure f_c pour le filtre anti-repliement (positionné avant l'échantillonneur) :

❖ Filtre anti-repliement :

Cas du signal carré :
On échantillonne un signal analogique carré de fréquence $f = 1{,}0\ kHz$ (ne possédant que des amplitudes non nulles pour les harmoniques impairs).

31. Combien d'harmoniques possèdent un signal carré ? En déduire la valeur de f_{max} pour ce signal.

32. Peut-on respecter la condition de Shannon afin d'échantillonner correctement un signal carré ?

Le signal analogique carré est envoyé à l'entrée d'un système passe-bas (considéré idéal), dont la fréquence de coupure est $f_c = 8{,}0\ kHz$. Ce filtre est nommé « filtre anti-repliement ».

33. Quels sont les harmoniques ayant une amplitude non nulle, pour le signal en sortie du passe-bas ? En déduire la valeur de f_{max} pour ce signal.

34. Entourer dans la liste suivante, la ou les valeur(s) de fréquence d'échantillonnage permettant de respecter la condition de Shannon :

$$f_e = 2{,}0\ kHz\ \ ;\ f_e = 3{,}5\ kHz\ \ ;\ f_e = 12\ kHz\ \ ;\ f_e = 14\ kHz\ ;\ \ f_e = 20\ kHz$$

Cas d'un signal sonore :
Le domaine des fréquences audibles par l'oreille humaine s'étale de $20\ Hz$ à $20\ kHz$. Pour un fichier sonore (.mp3 ou .wav), la fréquence d'échantillonnage est de $f_e = 44{,}10\ kHz$.

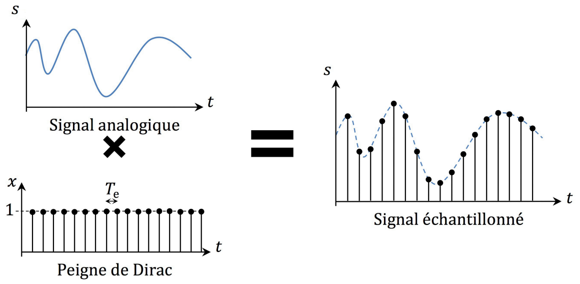
35. Avec $f_e = 44{,}10\ kHz$, arrive-t-on à échantillonner correctement toutes les fréquences des composantes d'un son audible ? Quelles fréquences sont les plus fidèlement échantillonnées ?

36. Si on échantillonne un fichier sonore à $f_e = 8{,}0\ kHz$, quelles raies du spectre du signal sonore ne seront pas échantillonnées correctement ?

Valider votre réponse les fichiers C06_instant_crush_44kHz_16bits.wav et C06_instant_crush _8kHz_16bits.wav

❖ L’échantillonneur-bloqueur : principe (pour les ER uniquement)

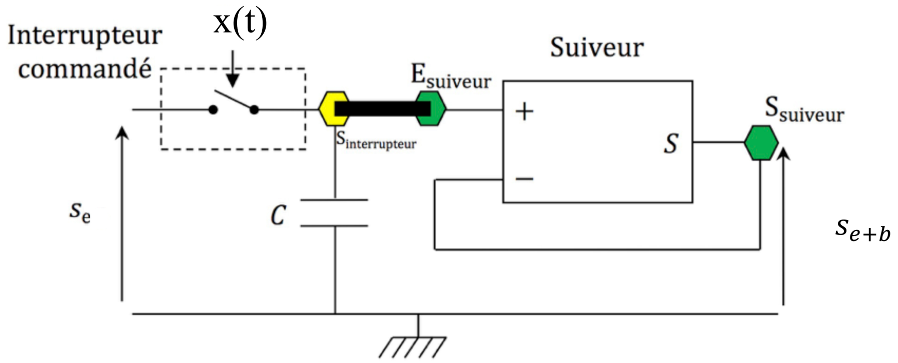
Pour prélever des échantillons d’un signal analogique, on utilise un système « multiplieur » qui multiplie le signal analogique avec un signal nommé « peigne de Dirac », noté $x(t)$:



- d'amplitude 1,0 V à chaque instant dont la valeur est égale à nT_e, $n \in \mathbb{N}$
- d’amplitude zéro pour tous les autres instants

Le signal en sortie du multiplieur est le signal échantillonné, noté $s_e(t)$.

Puis, on envoie le signal $s_e(t)$ en entrée du système suivant : il comporte un interrupteur commandé (circuit intégré 4066) que l’on commande par le signal $x(t)$, le peigne de Dirac.



Ainsi lorsque $x(t)$, est dans l’état haut, l’interrupteur commandé est fermé et le signal analogique est transmis aux bornes du condensateur : le condensateur est chargé à 95% au bout d’une durée égale à $\Delta t_{5\%} = 3RC$ (ici R est la résistance des fils). La tension aux bornes du condensateur est donc rapidement égale à celle de $s_e(t)$.

Le montage suiveur permet d’éviter la décharge du condensateur dans le reste du circuit : il déconnecte la partie gauche, de la partie droite. Son impédance d’entrée est considérée infinie.
Le signal de sortie s_{e+b} est donc égal à s_e . Leur valeur reste constante tant que l’on ne ferme pas à nouveau l’interrupteur.

Le choix de la valeur de la capacité C est donc un compromis entre le temps d'acquisition de l'échantillonneur et sa « précision » :

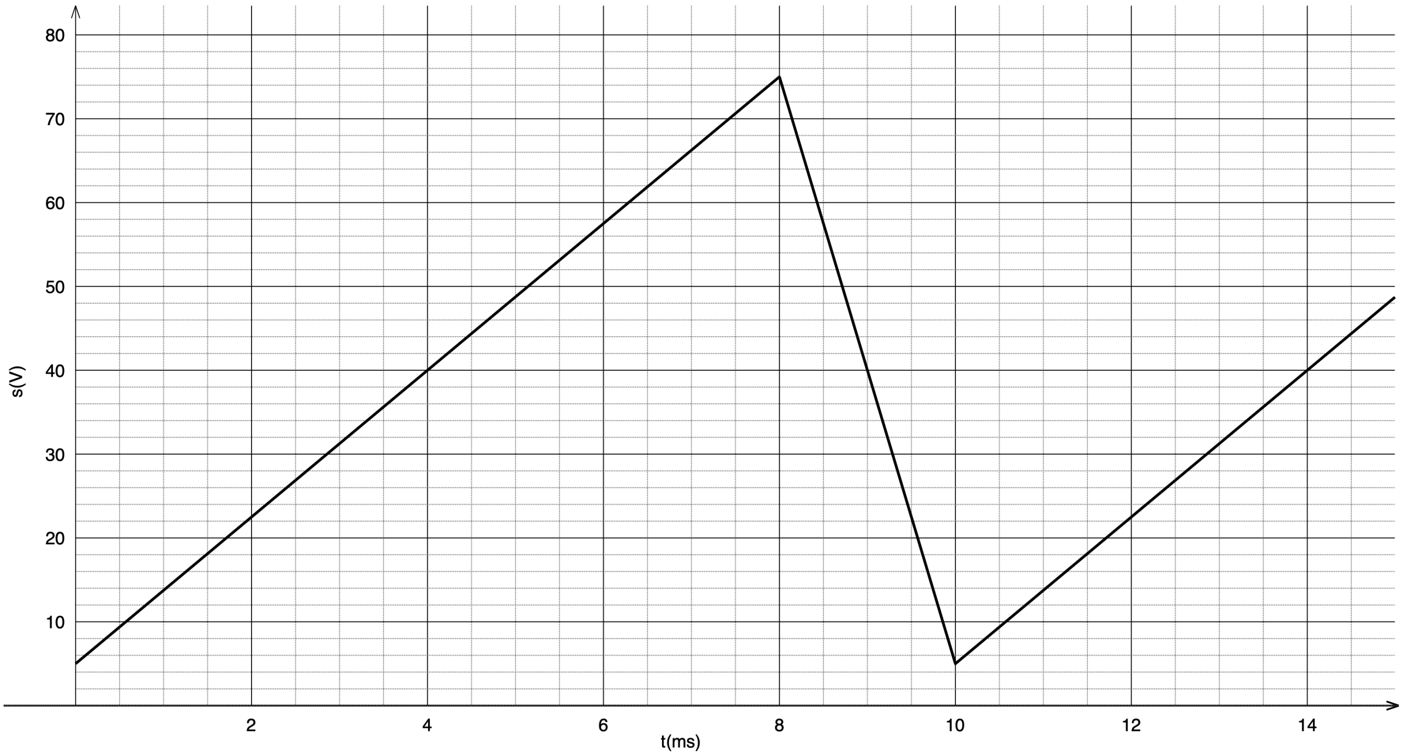
- Lorsque la capacité est faible, le temps d'acquisition est réduit, mais la précision est mauvaise à cause de la décharge rapide du condensateur.
- Lorsque la capacité est forte, le temps d'acquisition devient prohibitif. Par contre, la tension analogique mesurée demeure bien constante entre deux échantillonnages.

❖ Du signal analogique au signal numérique : convertisseur analogique-numérique

37. Déterminer la valeur du pas de quantification pour un CAN dont la résolution est de 3 $bits$ et dont le calibre d’entrée est entre 0 V et 80 V :

Le signal analogique $s(t)$ suivant est échantillonné à $t = 0\ ms$ puis toutes les $T_e = 1{,}5\ ms$. Il est ensuite bloqué.

38. Tracer, sur le graphe ci-dessous :
    - en noir, le signal échantillonné et bloqué, noté s_{e+b}
    - les niveaux de tensions quantifiées



39. En vous aidant de votre construction, indiquer le code binaire sortant du CAN pour le premier motif du signal :

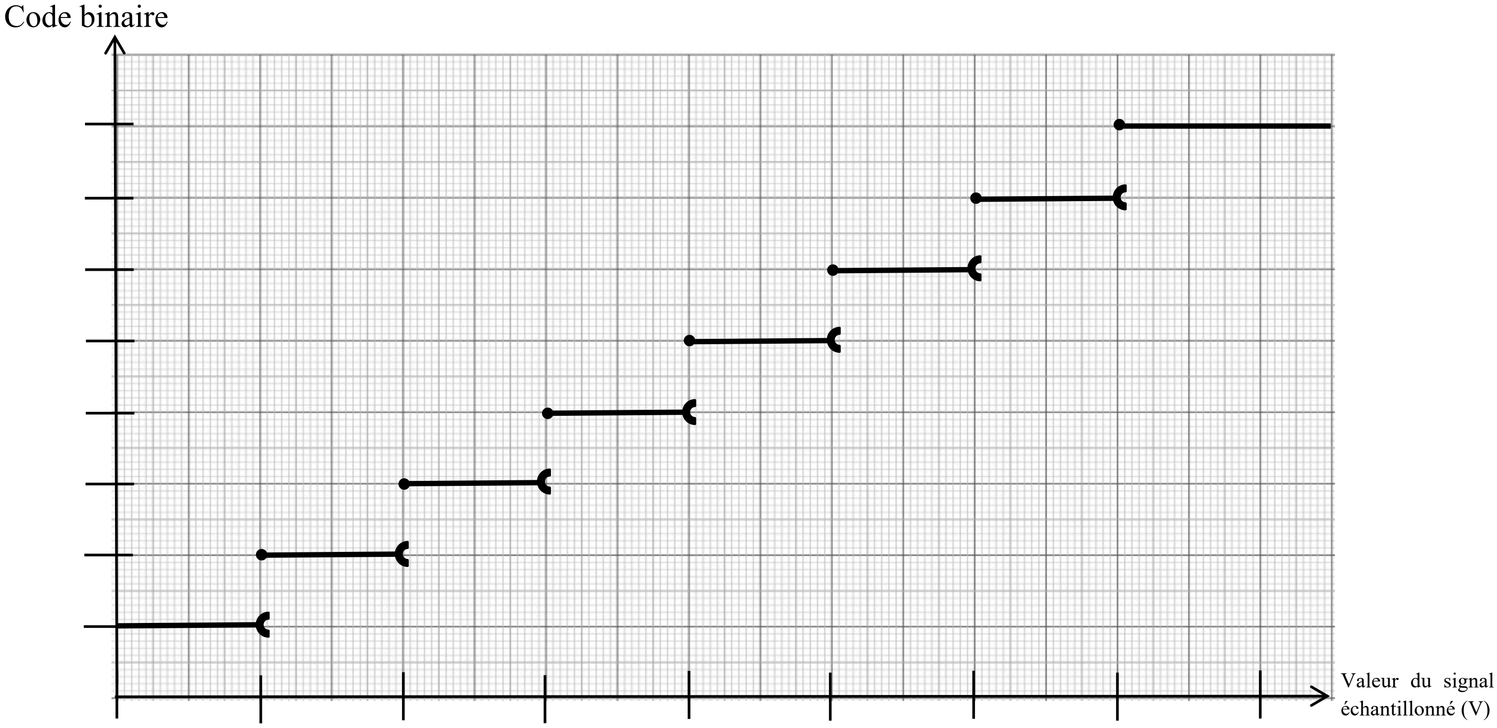
40. Indiquer le code binaire (et le nombre décimal correspondant) sortant du CAN si la valeur échantillonnée en entrée, est égale à $22{,}0\ V$:

41. Indiquer le code binaire (et le nombre décimal correspondant) sortant du CAN si la valeur échantillonnée en entrée, est égale à $29{,}0\ V$:

42. A l'aide des deux derniers exemples, répondre à la question suivante : le codage est-il une opération réversible ?

❖ Comment déterminer rapidement le nombre binaire (ou décimal) en sortie d'un CAN ?

43. Compléter la caractéristique de transfert idéale de ce CAN :



44. A l'aide de cette caractéristique, déterminer le code binaire, puis le nombre décimal $M_{(10)}$, en sortie du CAN si $s_e = 73\ V$:

45. A l'aide de la formule utile, déterminer le nombre décimal $M_{(10)}$ en sortie du CAN si $s_e = 44\ V$. En déduire le code binaire associé pour un CAN de 3 bits.

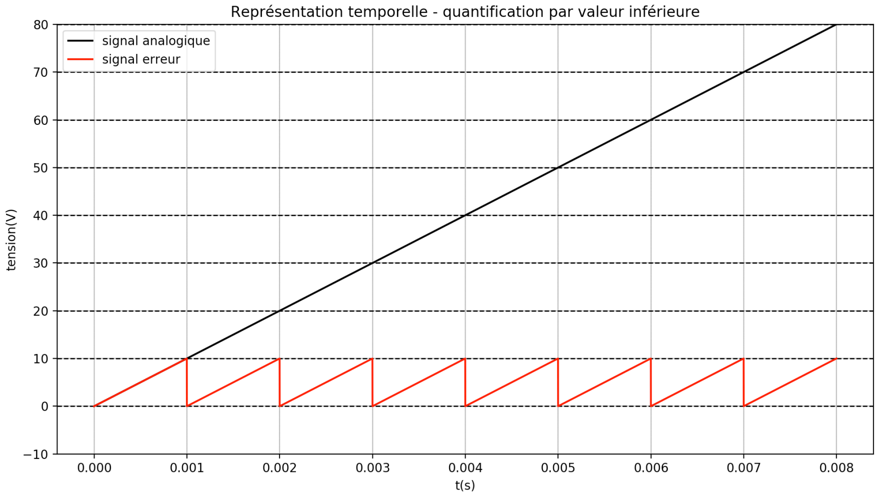
❖ Comment déterminer la valeur quantifiée attribuée en sortie du CNA, pour une valeur échantillonnée ?

46. Déterminer la valeur quantifiée x attribuée, par valeur inférieure, à la valeur échantillonnée $s_e = 44\ V$:

47. Déterminer la valeur quantifiée x attribuée, par valeur centrale, à la valeur échantillonnée $s_e = 44\ V$:

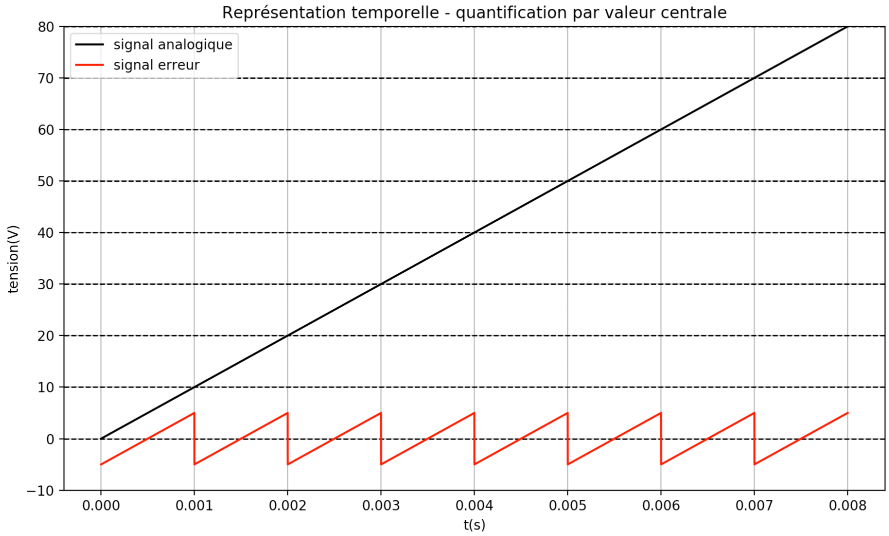
❖ Erreur de quantification :

48. Pour une quantification par valeur inférieure, déterminer la valeur de l'erreur de quantification sila valeur échantillonnée est $s_e = 44\,V$:



On donne ci-contre la représentation temporelle du signal erreur, pour une demi-période du signal analogique, avec quantification par valeur inférieure.

49. Proposer un encadrement pour l'erreur de quantification :



On donne ci-contre la représentation temporelle du signal erreur, pour une demi-période du signal analogique, avec quantification par valeur centrale :

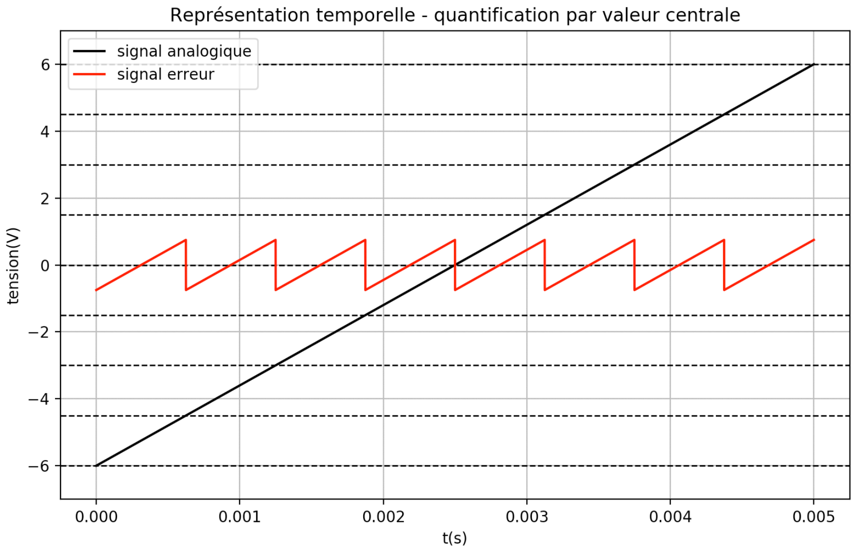
50. Proposer un encadrement pour l'erreur de quantification :

51. Quelle règle de quantification permet d'obtenir une valeur efficace plus faible pour le signal d'erreur ?

52. Pour une même règle de quantification, comment évolue l'amplitude du signal d'erreur quand la résolution n du CAN augmente ?

Écouter les fichiers C06_instant_crush_44kHz_16bits.wav et C06_instant_crush_44kHz_8bits.wav pour se rendre compte de l'influence de n

❖ Rapport signal sur bruit :



Le **rapport signal sur bruit** d'un CAN idéal est défini pour un signal d'entrée triangulaire alternatif (signal analogique) dont la valeur crête à crête correspond à la tension pleine échelle du CAN. Le CAN procède par valeur centrale.

L'amplitude du signal d'entrée, notée U_m, est liée à la tension pleine échelle ΔU par la formule suivante :

$$2U_m = \Delta U$$

53. Démontrer que la puissance moyenne normalisée du signal d'entrée peut s'exprimer ainsi : $P_{signal} = \frac{{U_m}^2}{3}$

Le signal d'entrée est triangulaire et alternatif donc :

La puissance moyenne normalisée du signal est, par définition :

54. Démontrer que la puissance moyenne normalisée du bruit (issu de l'erreur de quantification) peut s'exprimer ainsi : $P_{bruit} = \frac{q^2}{12}$

Le signal d'erreur est triangulaire et alternatif donc :

La puissance moyenne normalisée du bruit est, par définition :

55. Démontrer enfin que le rapport signal sur bruit en décibel peut s'exprimer ainsi : $SNR_{dB} \approx 6n$

$$\frac{P_{signal}}{P_{bruit}} = \frac{\frac{{U_m}^2}{3}}{\frac{q^2}{12}} = \frac{{U_m}^2}{q^2} \times 4 = \frac{{U_m}^2}{\left(\frac{2U_m}{2^n}\right)^2} \times 4 = \frac{{U_m}^2 \times (2^n)^2}{(U_m)^2} \times \frac{4}{4} = (2^n)^2 = 2^{2n}$$

$$SNR_{dB} = 10\log\frac{P_{signal}}{P_{bruit}} = 10\log(\,2^{2n}\,)$$

$$SNR_{dB} = 10\log(\,2^{2n})$$

$$SNR_{dB} = 10 \times 2n \times \log(\,2)$$

$$SNR_{dB} = 20\,n\,log(\,2) \approx \boldsymbol{6n}$$