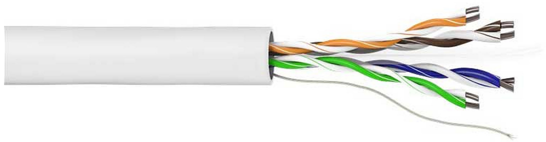
Chapitre 06 – Numérisation d'une tension

Activités et applications

❖ Activité introductive : pourquoi doit-on numériser des tensions analogiques ?

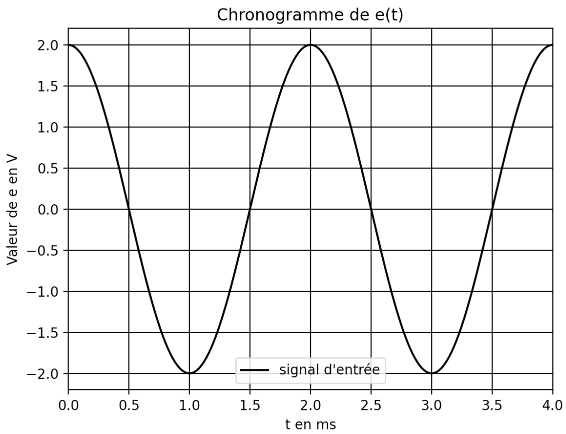


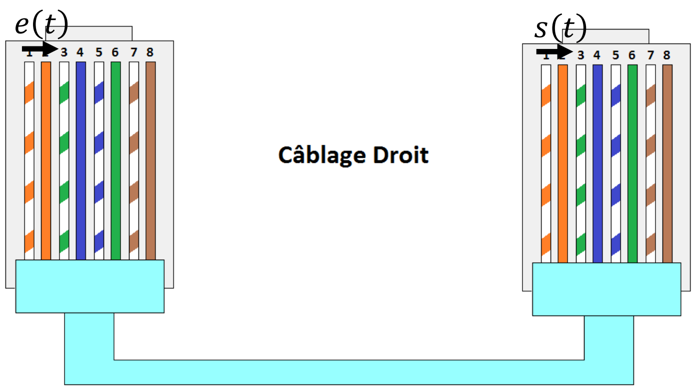
Modèle U/UTP

On étudie la transmission dans un câble ETHERNET *U/UTP* d'une information.

Les 4 paires de fils sont torsadées et non blindées individuellement avec une feuille d'aluminium.
Il n'y a pas non plus de blindage général du câble.

Dans un premier temps, l'information que l'on souhaite transmettre est une tension analogique, sinusoïdale alternative, notée $e(t)$. Cette tension est envoyée sur la paire orange (1- 2).





1. Tracer les flèches représentant la tension $e(t)$ et la tension de sortie $s(t)$ sur le schéma du câble ETHERNET.

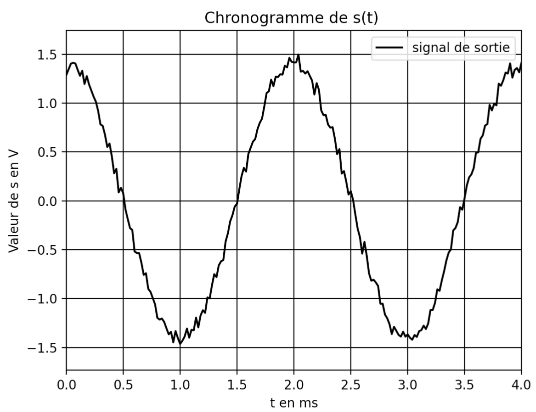
2. Quel est le système étudié ici ?

On étudie le système « câble ETHERNET ».

3. Quelle est l'allure souhaitée du signal en sortie du câble ?

On souhaite que la transmission se fasse sans que le signal d'entrée soit modifié : le signal de sortie $s(t)$ doit être identique au signal d'entrée $e(t)$

Le chronogramme du signal de sortie $s(t)$ est donné ci-dessous :



4. Quel(s) phénomène(s) ont lieu lors de la transmission du signal dans le système ?

Il y a atténuation du signal.
Il y a ajout de parasites électromagnétiques et de bruit.

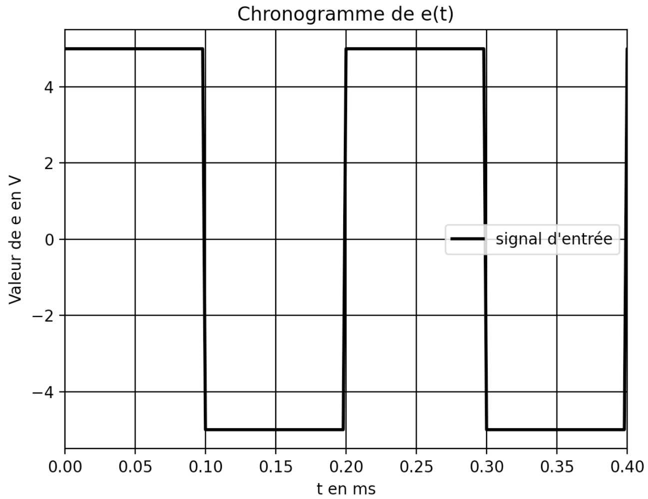
5. Comment peut-on éliminer les parasites électromagnétiques ?

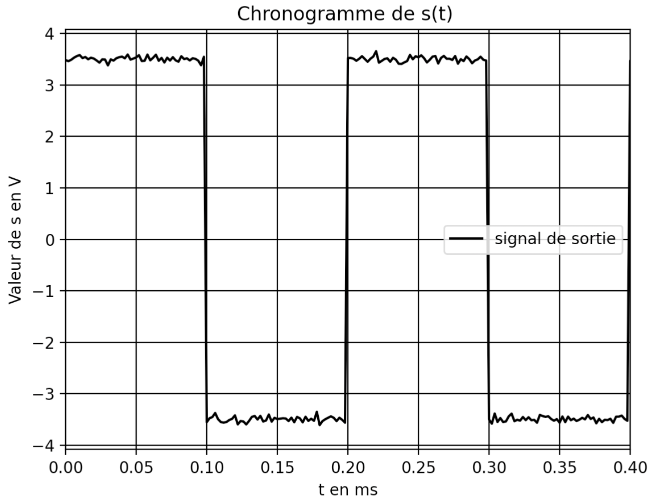
Il faut blinder les paires torsadées et/ou blinder le câble.

6. Peut-on éliminer l'atténuation de l'information et l'ajout du bruit par-dessus cette information ?

C'est impossible : l'information est dégradée lors de sa transmission dans le câble.

A présent, l'information que l'on souhaite transmettre dans ce même câble, est un signal numérique codé en binaire. On donne ci-dessous les chronogrammes du signal d'entrée $e(t)$ et du signal de sortie $s(t)$.





On utilise ici un codage « NRZ » :

- l'état haut (tension positive) code l'état logique 1,
- l'état bas (tension négative) code l'état logique 0.

La durée d'un bit (« rythme d'horloge ») est de $0{,}05\ ms$.

7. A l'aide du chronogramme du signal d'entrée, indiquer le code binaire envoyé à l'entrée de la paire torsadée :

1 1 0 0 1 1 0 0

8. A l'aide du chronogramme du signal de sortie, indiquer le code binaire reçu à la sortie de la paire torsadée :

1 1 0 0 1 1 0 0

9. L'information a-t-elle dégradée lors de sa transmission dans le câble ?

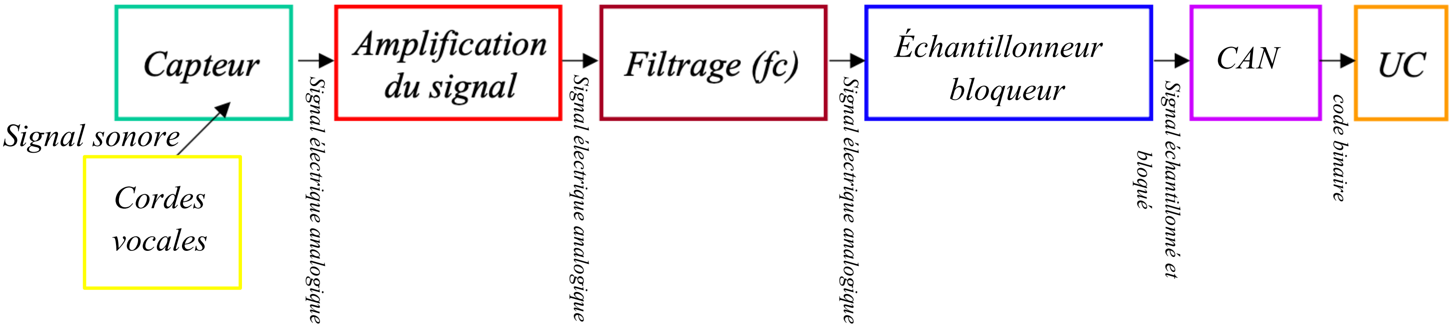
L'information (code binaire) n'a pas été dégradée malgré la présence d'une atténuation, de bruit et de parasites.

10. Citer d'autres avantages de la numérisation des signaux analogiques.

On peut facilement stocker le code binaire (facilité de créer deux états différents) ou le reproduire. On peut aussi le stocker sur des supports de plus en plus petits en taille (miniaturisation).

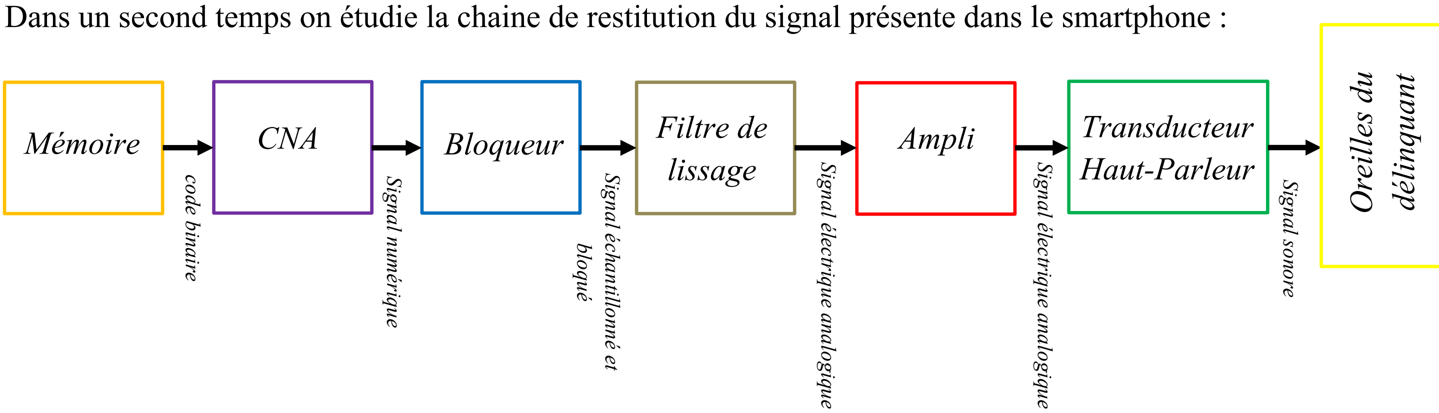
❖ Une première chaine de numérisation d'un signal sonore :

Beyoncé enregistre actuellement son prochain album, au studio A110.
Dans un premier temps, on étudie la chaine de numérisation présente dans le studio A110 :



11. Compléter à l'aide du vocabulaire suivant le schéma fonctionnel (partiel) de la chaine de numérisation : signal sonore, signal électrique analogique, signal échantillonné et bloqué, code binaire.

Un extrait de l'un des morceaux (ou « snippet » en anglais) a fuité et est disponible en ligne. L'internaute, dont le pseudo est @PhysicisbetterthanBeyonce, télécharge puis écoute sur son smartphone l'extrait, en toute illégalité.
Dans un second temps on étudie la chaine de restitution du signal présente dans le smartphone :



12. Compléter à l'aide du vocabulaire suivant le schéma fonctionnel (partiel) de la chaine de restitution : signal sonore, signal électrique analogique, signal échantillonné et bloqué, signal numérique, code binaire.

13. Comment doivent-être idéalement, les deux signaux sonores situés en début de chaine de numérisation et en sortie de chaine de restitution ?

Idéalement, les deux signaux sonores doivent être identiques : il faudrait que chaque étape de traitement du signal soit réversible.

❖ Fréquence et période d'échantillonnage :

14. La fréquence d'échantillonnage est $f_e = 2{,}00\ kHz$. Déterminer la valeur de la période d'échantillonnage T_e (en milliseconde) :

$$T_e = \frac{1}{f_e} = \frac{1}{2{,}00 \times 10^3} = 0{,}500\ ms$$

Toutes les $0{,}500\ ms$, l'échantillonneur prélève la valeur du signal analogique.

❖ Profondeur de mémoire d'un numériseur :

L'oscilloscope AGILENT possède une profondeur de mémoire de $14\,Mpts$ par voie et une fréquence d'échantillonnage $f_e = 1\ GHz$.

15. Quelle durée totale d'acquisition est capable de numériser cet oscilloscope ?

$$N_{tot} = \Delta t \times f_e \Leftrightarrow \Delta t = \frac{N_{tot}}{f_e} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{14 \times 10^6}{1 \times 10^9} = 14{,}0 \times 10^{-3} s = 14{,}0\ ms$$

16. Sur quel paramètre doit-on jouer afin d'augmenter la durée totale d'acquisition de l'oscilloscope ?

Pour que la durée totale d'acquisition Δt augmente, il faut diminuer la fréquence d'échantillonnage f_e de l'oscilloscope. On pourra alors détecter les variations du signal sur de plus longues durées (au détriment des variations se produisant sur des courtes durées).

❖ Nombre moyen d'échantillons par motif (si le signal analogique est périodique) :

17. Pour l'oscilloscope AGILENT à une fréquence $f_e = 1\ GHz$, calculer le nombre d'échantillons par motif si le signal analogique a pour fréquence $f = 100\ Hz$.

$$N = \frac{f_e}{f} = \frac{1 \times 10^9}{100} = 1 \times 10^7\ échantillons\ par\ motif$$

18. Pour l'oscilloscope AGILENT à une fréquence $f_e = 1\ GHz$, calculer le nombre d'échantillons par motif si le signal analogique a pour fréquence $f = 150\ Hz$.

$$N = \frac{f_e}{f} = \frac{1 \times 10^9}{150} = 6{,}66\ \times 10^6\ échantillons\ par\ motif$$

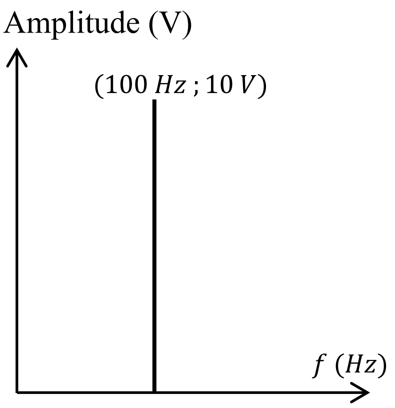
N est un nombre moyen d'échantillons par motif : il peut donc ne pas être entier.

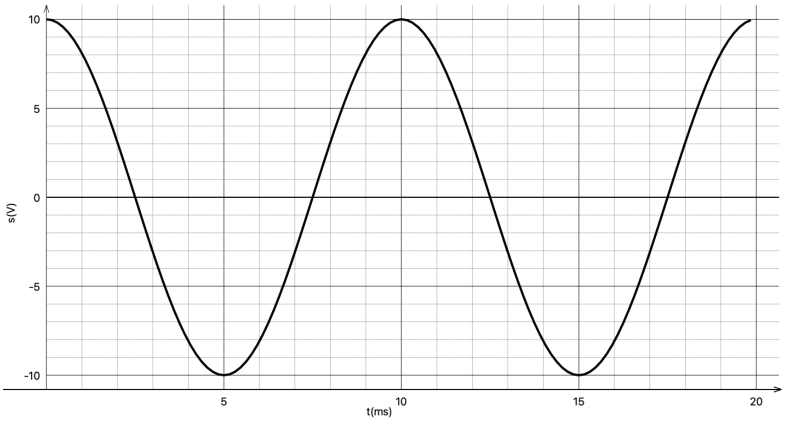
19. Commenter les valeurs des nombres moyens d'échantillons par motif obtenues :

Ils sont énormes ! Si la fréquence f_e de l'oscilloscope est toujours la même $f_e = 1\ GHz$, l'oscilloscope sur-échantillonne les signaux de $100\ Hz\ et\ 150\ Hz$.

❖ Spectre du signal échantillonné $s_e(t)$: simulation sur Python

Le signal analogique $s(t)$ est sinusoïdal alternatif de fréquence $f = 100\ Hz$ (donc de période $T = \frac{1}{100} = 1{,}0 \times 10^{-2} s$) et d'amplitude $U_m = 10{,}0\ V$. Son spectre en amplitude est donc celui tracer à gauche.

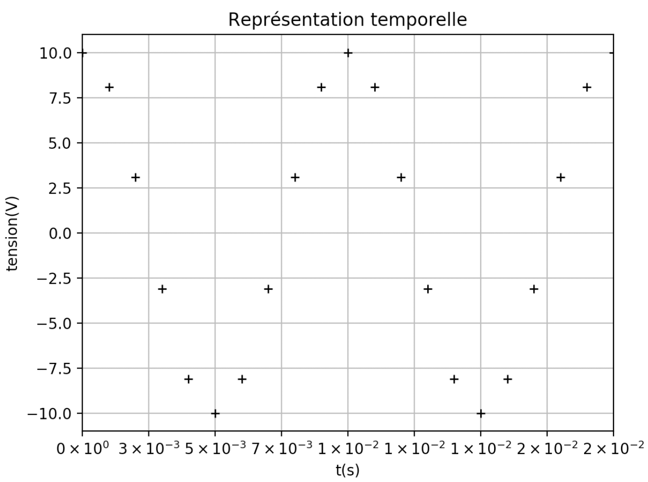




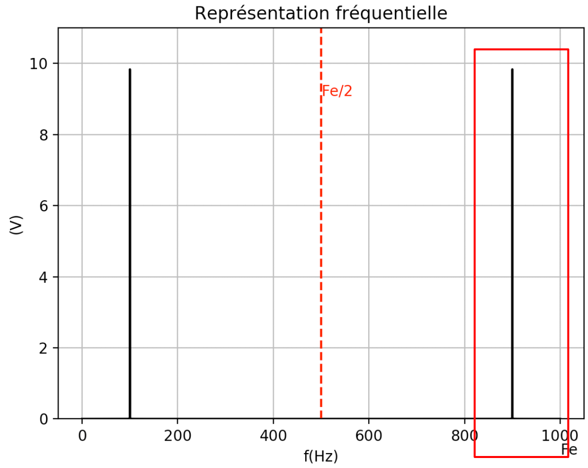
A l'aide d'une carte d'acquisition SYSAM-SP5 et de code Python, on réalise l'échantillonnage du signal analogique et obtient les représentations suivantes pour différentes fréquences f_e.

La fonction FFT ne trace le spectre du signal que dans un intervalle de fréquence restreint (entre 0 et f_e)

20. Pour chaque valeur de f_e, compléter le tableau ci-après.
21. Sur chaque spectre, entourer en rouge la raie du spectre relevant de l'échantillonnage.

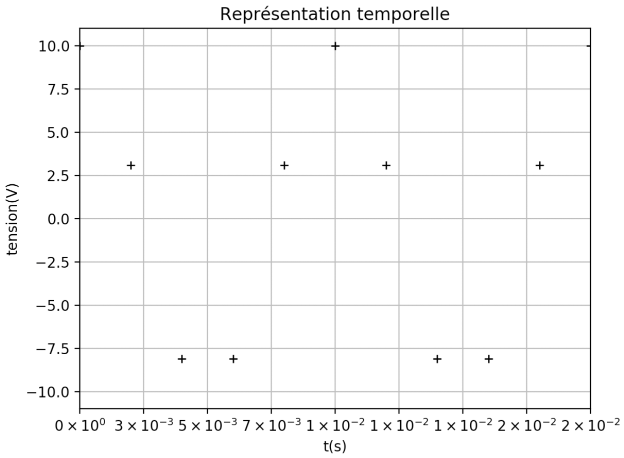
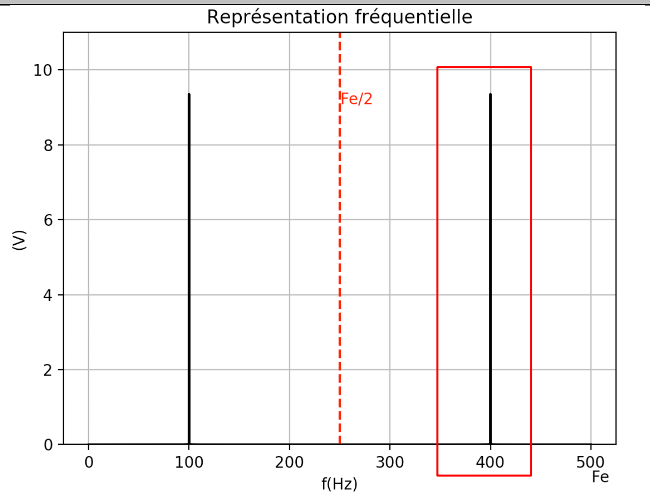
<table>
<tr><th>Représentation temporelle de s_e
pour $f_e = 1{,}000\ kHz$</th><th>Représentation fréquentielle de s_e
pour $f_e = 1{,}000\ kHz$</th></tr>
<tr><td>


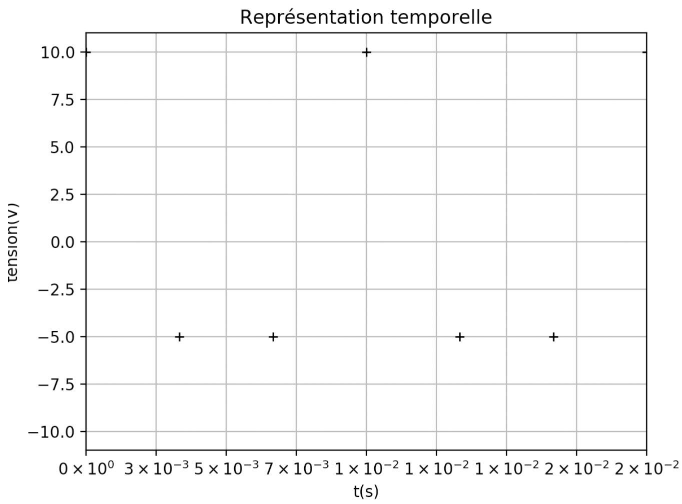
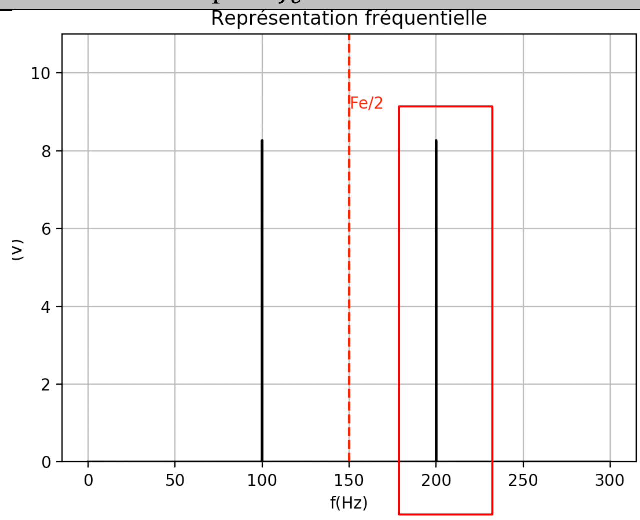
Période et fréquence du signal échantillonné s_e:
$T = 1{,}0 \times 10^{-2} s$ donc $f = \frac{1}{T} = 100\ Hz$

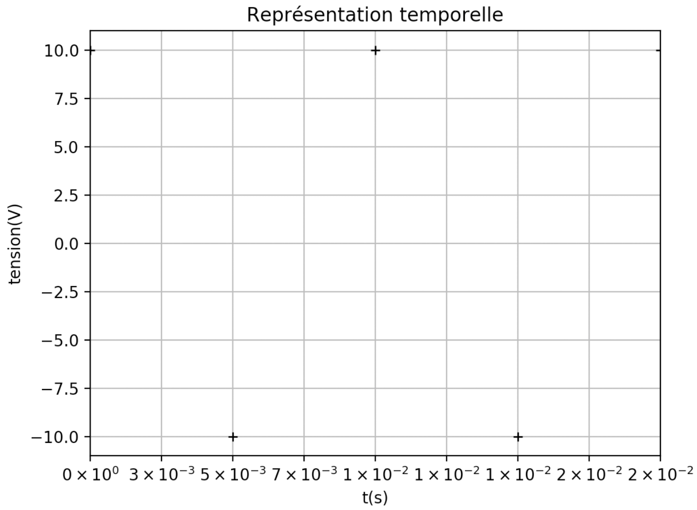
Amplitude du signal échantillonné s_e:
$U_m = 10\ V$
</td><td>


Amplitude des raies :
$U_m = 10\ V$
Fréquence des raies :
$f = 100\ Hz\ \ et\ f' = 900\ Hz$

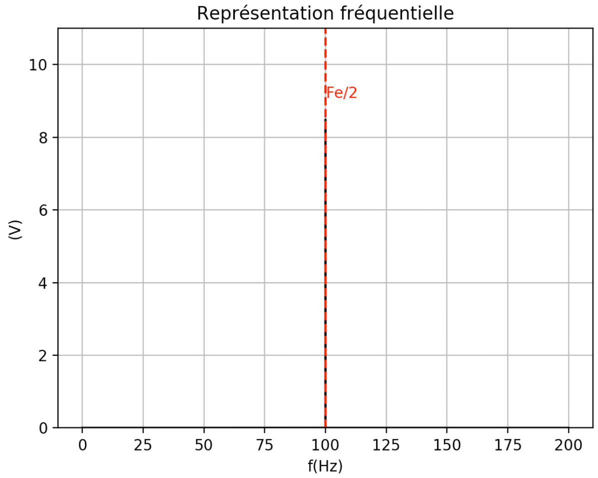
La fréquence f correspond-elle à celle observée sur la représentation temporelle ?
OUI
</td></tr>
</table>

Représentation temporelle de s_e pour $f_e = 500\ Hz$	Représentation fréquentielle de s_e pour $f_e = 500\ Hz$
 Période et fréquence du signal échantillonné s_e: $T = 1{,}0 \times 10^{-2} s$ donc $f = \frac{1}{T} = 100\ Hz$ Amplitude du signal échantillonné s_e: $U_m < 10\ V$	 Amplitude des raies : $U_m < 10\ V$ Fréquence des raies : $f = 100\ Hz\ \ et\ f' = 400\ Hz$ La fréquence f correspond-elle à celle observée sur la représentation temporelle ? OUI

Représentation temporelle de s_e pour $f_e = 300\ Hz$	Représentation fréquentielle de s_e pour $f_e = 300\ Hz$
 Période et fréquence du signal échantillonné s_e: $T = 1{,}0 \times 10^{-2} s$ donc $f = \frac{1}{T} = 100\ Hz$ Amplitude du signal échantillonné s_e: $U_m < 10\ V$	 Amplitude des raies : $U_m < 10\ V$ Fréquence des raies : $f = 100\ Hz\ \ et\ f' = 200\ Hz$ La fréquence f correspond-elle à celle observée sur la représentation temporelle ? OUI

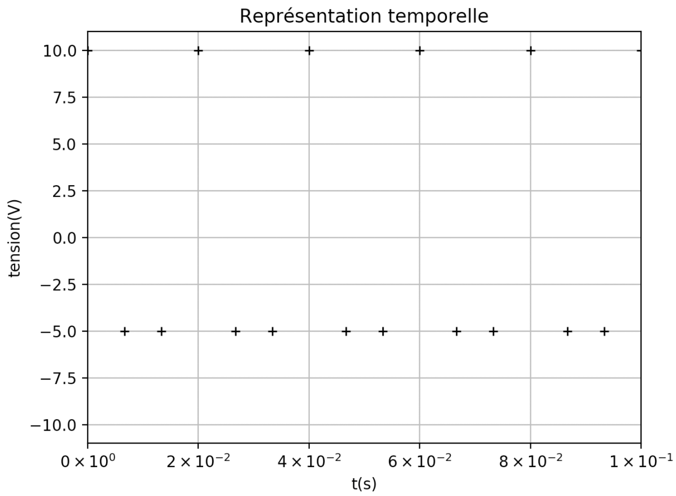
<table>
<tr><th>Représentation temporelle de s_e
pour $f_e = 200\ Hz$</th><th>Représentation fréquentielle de s_e
pour $f_e = 200\ Hz$</th></tr>
<tr><td>


Période et fréquence du signal échantillonné s_e:
$T = 1{,}0 \times 10^{-2} s$ donc $f = \frac{1}{T} = 100\ Hz$

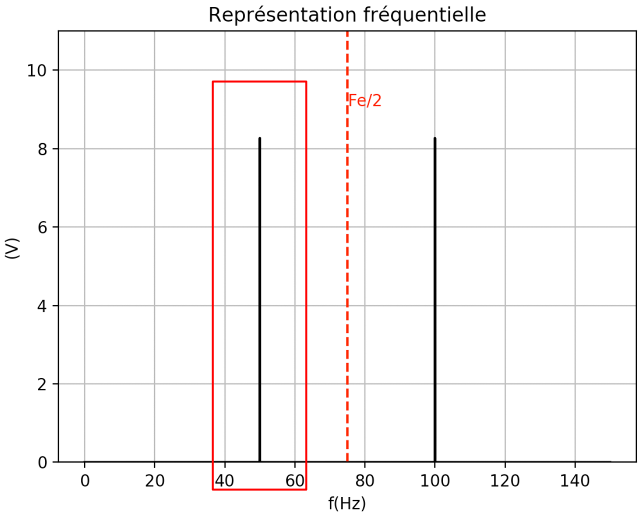
Amplitude du signal échantillonné s_e:
$U_m = 10\ V$
</td><td>


Amplitude des raies :
$U_m = 10\ V$
Fréquence des raies :
$f = 100\ Hz\ \ et\ f' = 100\ Hz$

La fréquence f correspond-elle à celle observée sur la représentation temporelle ?
OUI
</td></tr>
</table>

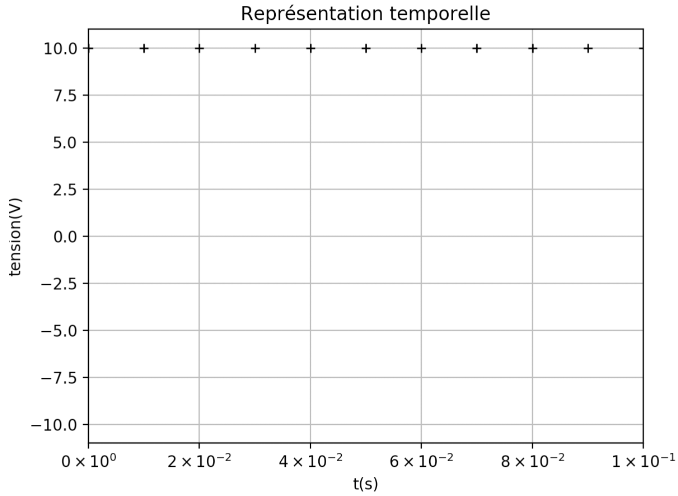
<table>
<tr><th>Représentation temporelle de s_e
pour $f_e = 150\ Hz$</th><th>Représentation fréquentielle de s_e
pour $f_e = 150\ Hz$</th></tr>
<tr><td>


Période et fréquence du signal échantillonné s_e:
$T = 2{,}0 \times 10^{-2} s$ donc $f = \frac{1}{T} = 50\ Hz$

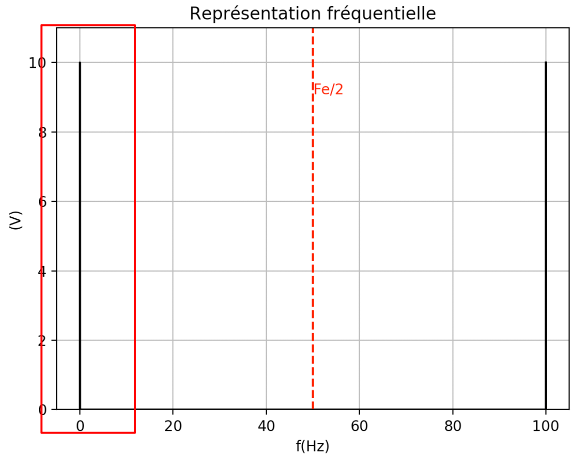
Amplitude du signal échantillonné s_e:
$U_m < 10\ V$
</td><td>


Amplitude des raies :
$U_m < 10\ V$
Fréquence des raies :
$f = 100\ Hz\ \ et\ f' = 50\ Hz$

La fréquence f correspond-elle à celle observée sur la représentation temporelle ?
NON, c'est la fréquence f'
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Représentation temporelle de s_e
pour $f_e = 100\ Hz$</th><th>Représentation fréquentielle de s_e
pour $f_e = 100\ Hz$</th></tr>
<tr><td>

Période et fréquence du signal échantillonné s_e:
$T = \infty$ donc $f = \frac{1}{T} = 0\ Hz$

Amplitude du signal échantillonné s_e:
$impossible$</td><td>

« Amplitude » des raies :
$10\ V$
Fréquence des raies :
$f = 100\ Hz\ \ et\ f' = 0\ Hz$

La fréquence f correspond-elle à celle observée sur la représentation temporelle ?
NON, c'est la fréquence f'</td></tr>
</table>

22. En déduire la formule mathématique donnant f' en fonction de $f\ et\ f_e$:

$$f' = f_e - f$$

❖ Condition de réversibilité de l'échantillonnage du signal analogique sinusoïdal alternatif :

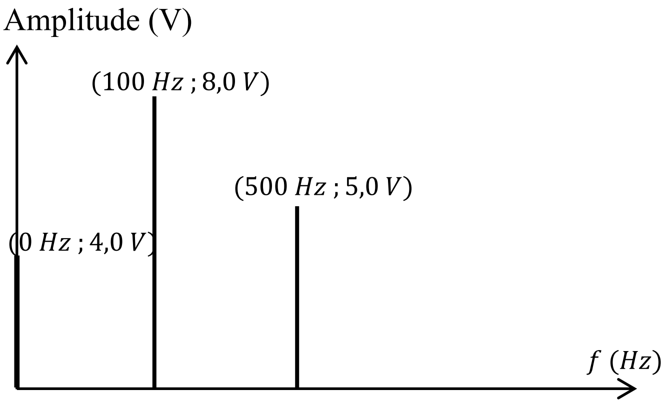
23. Pour $f_e = 1\ kHz$, quel type de filtre peut-on utiliser afin de restituer le signal analogique à partir du signal échantillonné ? Dans quel intervalle doit-être sa fréquence de coupure ?

On peut utiliser un filtre passe-bas ayant $100\ Hz < f_c < 900 Hz$

24. A partir de quelle valeur de f_e, le filtre proposé précédemment ne permet-il plus de restituer le signal analogique $s(t)$?

Lorsque $f_e < 200\ Hz$, le filtre passe-bas ne permet pas de restituer le signal analogique de départ : l'opération « échantillonnage » n'est plus réversible.

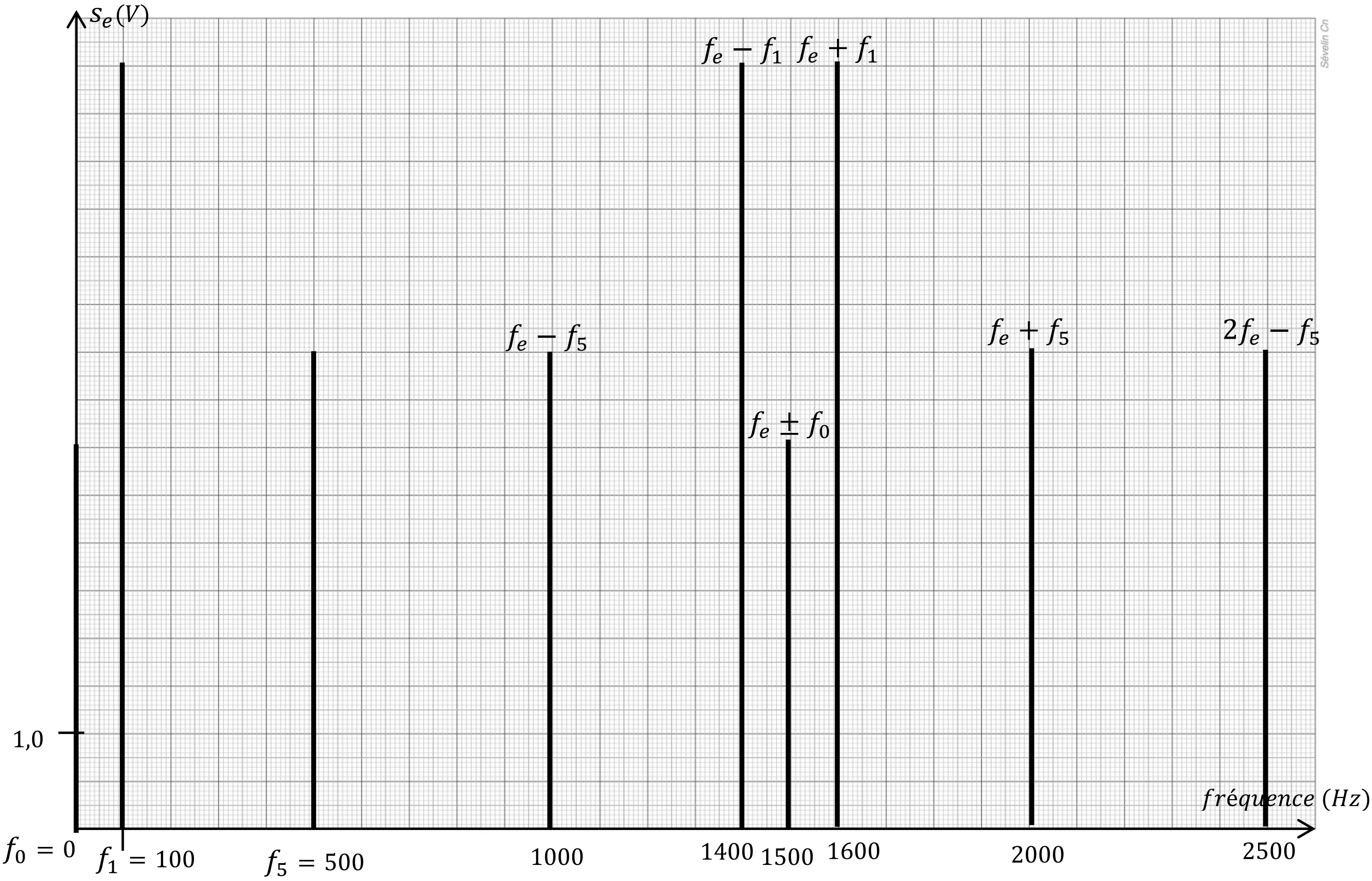
❖ Échantillonnage d'un signal dont le spectre est limité en fréquence :



On étudie un signal analogique $s(t)$ de fréquence $f = 100\ Hz$. Son spectre en amplitude est celui tracé à gauche.

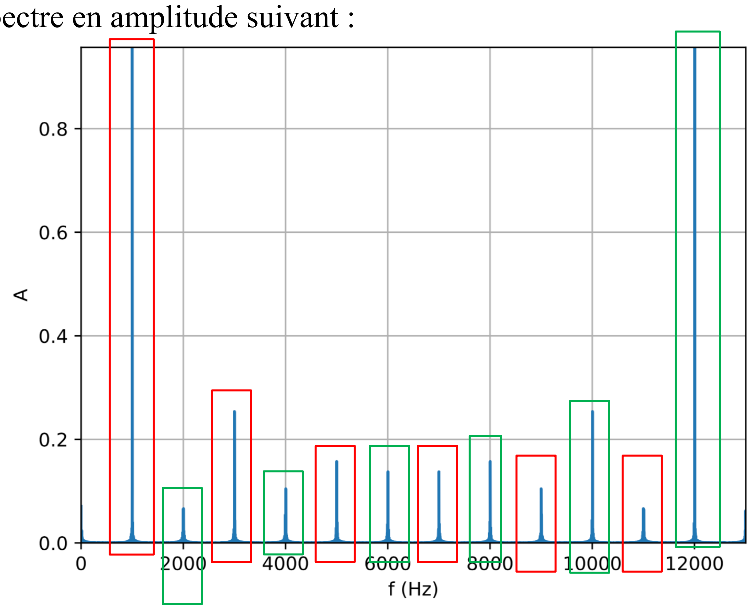
25. Choisir parmi les valeurs suivantes, une fréquence d'échantillonnage permettant d'obtenir un échantillonnage correct du signal analogique $s(t)$:
$f_e = 50\ Hz$; $f_e = 500\ Hz$; $f_e = 750\ Hz$
$f_e = 850\ Hz$; $f_e = 950\ Hz$; $\boxed{f_e = 1500\ Hz}$

26. Sur le graphe suivant, tracer le spectre du signal échantillonné s_e :



Cas du signal carré :

On échantillonne un signal analogique carré de fréquence $f = 1{,}0\ kHz$. Le signal échantillonné possède le spectre en amplitude suivant :



27. Entourer en rouge, les harmoniques du signal analogique d'origine.
28. Entourer en vert, les raies ayant pour abscisses $f_e - f_n$. On rappelle que $f_n = n \times f_1$
29. Quels harmoniques subissent un repliement ?

Rang 7 et plus

30. Proposer une fréquence de coupure f_c pour le filtre anti-repliement (positionné avant l'échantillonneur) :

Il faut garder les rangs 1 à 5 : on peut prendre $f_c > 5{,}0\ kHz$. Mais on veut éliminer les rangs 7 à l'infini : il faut que $f_c < 7{,}0\ kHz$. Donc $f_c = 6{,}1\ kHz$ par exemple.

❖ Filtre anti-repliement :

Cas du signal carré :
On échantillonne un signal analogique carré de fréquence $f = 1{,}0\ kHz$ (ne possédant que des amplitudes non nulles pour les harmoniques impairs).

31. Combien d'harmoniques possèdent un signal carré ? En déduire la valeur de f_{max} pour ce signal.
Ce signal possède une infinité d'harmoniques et $f_{max} \to +\infty$.

32. Peut-on respecter la condition de Shannon afin d'échantillonner correctement un signal carré ?
C'est impossible car $f_{max} \to +\infty$.

Le signal analogique carré est envoyé à l'entrée d'un système passe-bas (considéré idéal), dont la fréquence de coupure est $f_c = 8{,}0\ kHz$. Ce filtre est nommé « filtre anti-repliement ».

33. Quels sont les harmoniques ayant une amplitude non nulle, pour le signal en sortie du passe-bas ? En déduire la valeur de f_{max} pour ce signal.

Les harmoniques de rang $1, 3, 5\ et\ 7$ ont une amplitude non nulle donc $f_{max} = f_7 = 7{,}0\ kHz$.

34. Entourer dans la liste suivante, la ou les valeur(s) de fréquence d'échantillonnage permettant de respecter la condition de Shannon :

$$f_e = 2{,}0\ kHz \ ;\ f_e = 3{,}5\ kHz \ ;\ f_e = 12\ kHz \ ;\ \boxed{f_e = 14\ kHz \ ;\ f_e = 20\ kHz}$$

Cas d'un signal sonore :
Le domaine des fréquences audibles par l'oreille humaine s'étale de $20\ Hz$ à $20\ kHz$. Pour un fichier sonore (.mp3 ou .wav), la fréquence d'échantillonnage est de $f_e = 44{,}10\ kHz$.

35. Avec $f_e = 44{,}10\ kHz$, arrive-t-on à échantillonner correctement toutes les fréquences des composantes d'un son audible ? Quelles fréquences sont les plus fidèlement échantillonnées ?

$$f_{max} = 20\ kHz \text{ donc } 2 \times f_{max} = 40\ kHz.$$
$$44{,}10\ kHz > 40\ kHz \text{ donc échantillonnage correct.}$$

Les faibles fréquences (graves) sont les plus fidèlement échantillonnés.

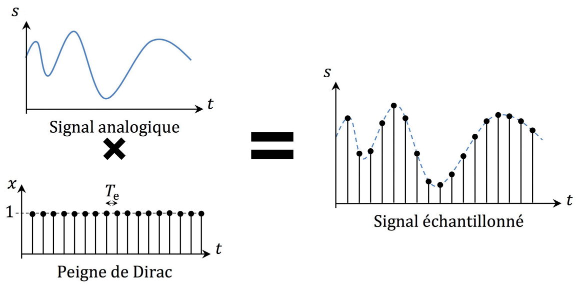
36. Si on échantillonne un fichier sonore à $f_e = 8{,}0\ kHz$, quelles raies du spectre du signal sonore ne seront pas échantillonnées correctement ?

Pour $f_e = 8{,}0\ kHz$, on échantillonne correctement jusqu'à $f_{max} = 4{,}0\ kHz$: on perd alors les aigus (fréquences au-delà de f_{max}).

Valider votre réponse les fichiers C06_instant_crush_44kHz_16bits.wav et C06_instant_crush _8kHz_16bits.wav

❖ L'échantillonneur-bloqueur : principe (pour les ER uniquement)

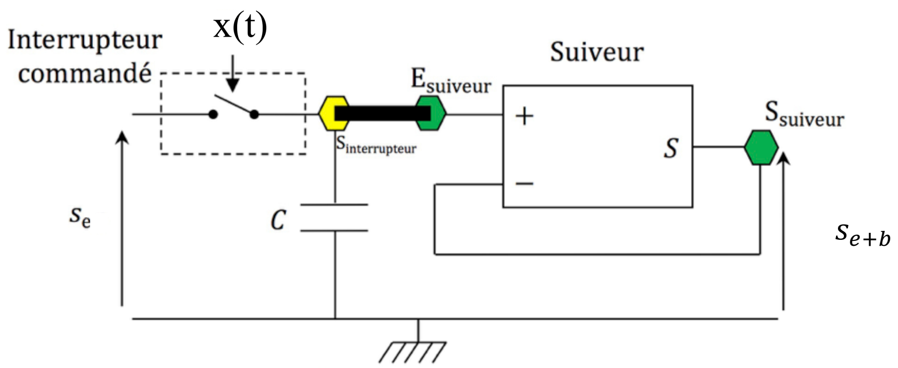
Pour prélever des échantillons d'un signal analogique, on utilise un système « multiplieur » qui multiplie le signal analogique avec un signal nommé « peigne de Dirac », noté $x(t)$:



- d'amplitude 1,0 V à chaque instant dont la valeur est égale à $nT_e, n \in \mathbb{N}$
- d'amplitude zéro pour tous les autres instants

Le signal en sortie du multiplieur est le signal échantillonné, noté $s_e(t)$.

Puis, on envoie le signal $s_e(t)$ en entrée du système suivant : il comporte un interrupteur commandé (circuit intégré 4066) que l'on commande par le signal $x(t)$, le peigne de Dirac.



Ainsi lorsque $x(t)$, est dans l'état haut, l'interrupteur commandé est fermé et le signal analogique est transmis aux bornes du condensateur : le condensateur est chargé à 95% au bout d'une durée égale à $\Delta t_{5\%} = 3RC$ (ici R est la résistance des fils). La tension aux bornes du condensateur est donc rapidement égale à celle de $s_e(t)$.

Le montage suiveur permet d'éviter la décharge du condensateur dans le reste du circuit : il déconnecte la partie gauche, de la partie droite. Son impédance d'entrée est considérée infinie.
Le signal de sortie s_{e+b} est donc égal à s_e . Leur valeur reste constante tant que l'on ne ferme pas à nouveau l'interrupteur.

Le choix de la valeur de la capacité C est donc un compromis entre le temps d'acquisition de l'échantillonneur et sa « précision » :

- Lorsque la capacité est faible, le temps d'acquisition est réduit, mais la précision est mauvaise à cause de la décharge rapide du condensateur.
- Lorsque la capacité est forte, le temps d'acquisition devient prohibitif. Par contre, la tension analogique mesurée demeure bien constante entre deux échantillonnages.

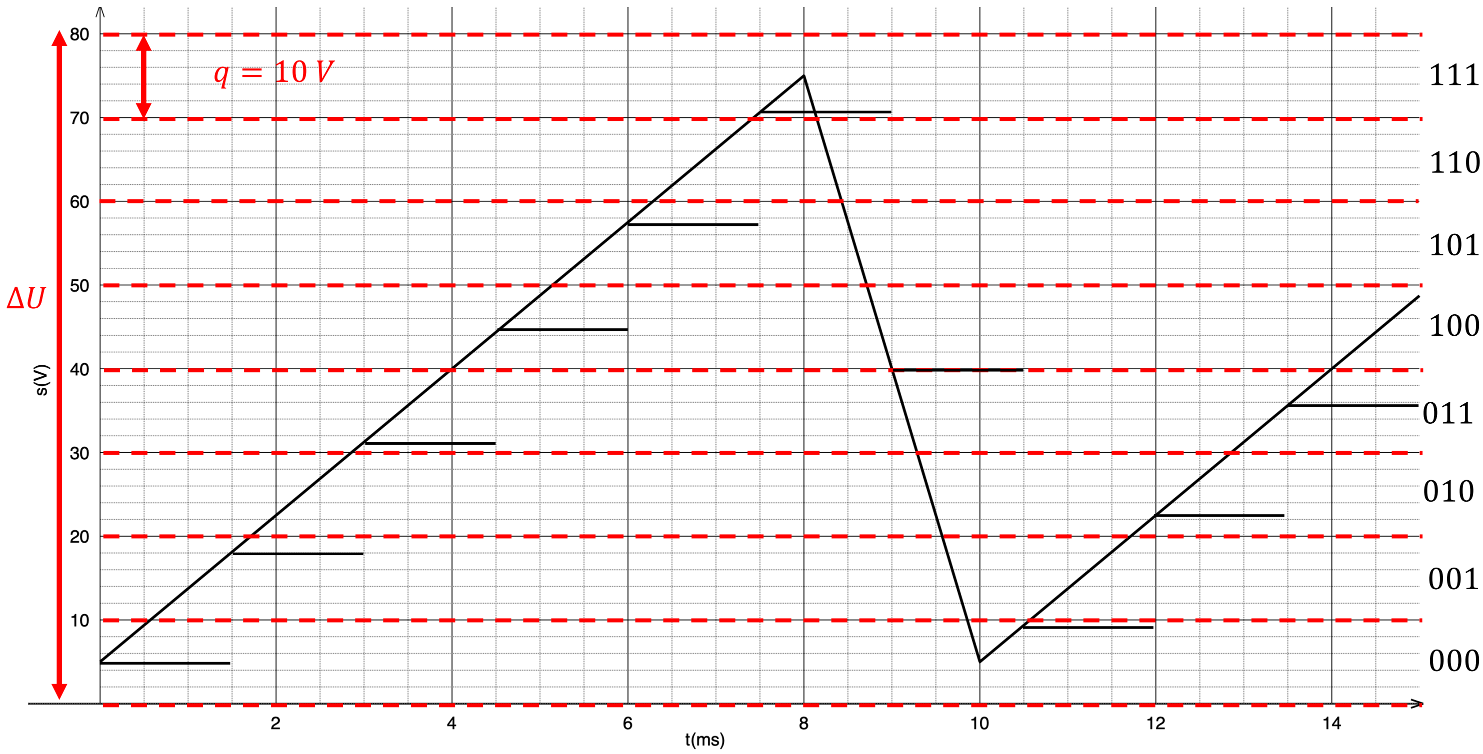
❖ Du signal analogique au signal numérique : convertisseur analogique-numérique

37. Déterminer la valeur du pas de quantification pour un CAN dont la résolution est de 3 $bits$ et dont le calibre d'entrée est entre 0 V et 80 V :

$$q = \frac{\Delta U}{2^n} = \frac{80 - 0}{2^3} = 10V$$

Le signal analogique $s(t)$ suivant est échantillonné à $t = 0\ ms$ puis toutes les $T_e = 1{,}5\ ms$. Il est ensuite bloqué.

38. Tracer, sur le graphe ci-dessous :
    - en noir, le signal échantillonné et bloqué, noté s_{e+b}
    - les niveaux de tensions quantifiées



39. En vous aidant de votre construction, indiquer le code binaire sortant du CAN pour le premier motif du signal :

000 001 011 100 101 111 100

40. Indiquer le code binaire (et le nombre décimal correspondant) sortant du CAN si la valeur échantillonnée en entrée, est égale à $22{,}0\ V$:

$$010_{(2)} = 2_{(10)}$$

41. Indiquer le code binaire (et le nombre décimal correspondant) sortant du CAN si la valeur échantillonnée en entrée, est égale à $29{,}0\ V$:

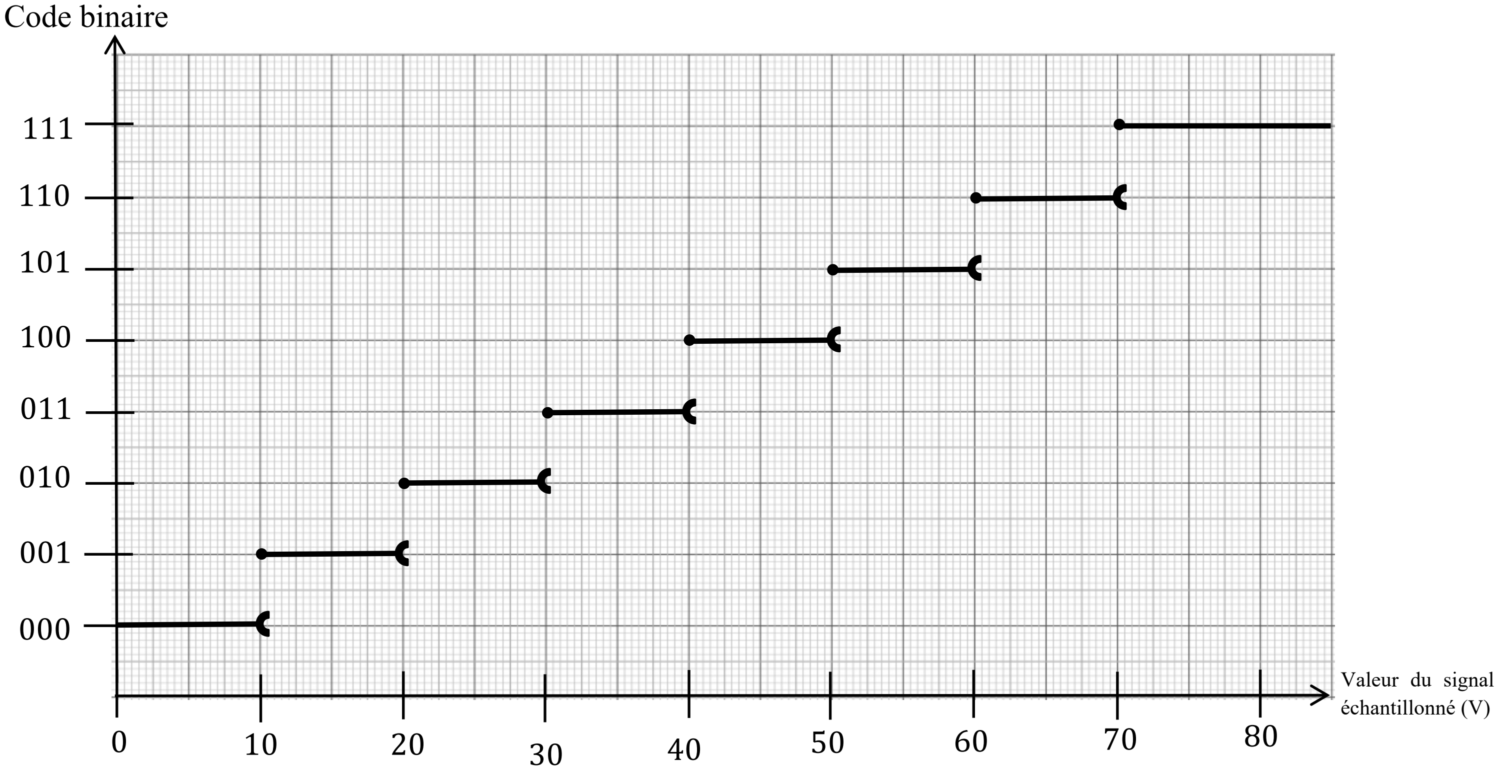
$$010_{(2)} = 2_{(10)}$$

42. A l'aide des deux derniers exemples, répondre à la question suivante : le codage est-il une opération réversible ?

On utilise le même code pour deux valeurs différentes du signal : il nous sera impossible de les distinguer par la suite. Le codage n'est donc pas une opération réversible.

❖ **Comment déterminer rapidement le nombre binaire (ou décimal) en sortie d'un CAN ?**

43. Compléter la caractéristique de transfert idéale de ce CAN :



44. A l'aide de cette caractéristique, déterminer le code binaire, puis le nombre décimal $M_{(10)}$, en sortie du CAN si $s_e = 73\ V$:

Le code est $111_{(2)}$ ce qui correspond au nombre décimal $M_{(10)} = 7$

45. A l'aide de la formule utile, déterminer le nombre décimal $M_{(10)}$en sortie du CAN si $s_e = 44\ V$. En déduire le code binaire associé pour un CAN de 3 bits.

$$M_{(10)} est\ l'entier\ inférieur\ de\ X = \frac{s_e - U_{CAN,min}}{q} = \frac{44 - 0}{q} = 4$$

$$4_{(10)} = 100_{(2)}$$

❖ **Comment déterminer la valeur quantifiée attribuée en sortie du CNA, pour une valeur échantillonnée ?**

46. Déterminer la valeur quantifiée x attribuée, par valeur inférieure, à la valeur échantillonnée $s_e = 44\ V$:

$$x = U_{CNA,min} + M_{(10)} \times q = 0 + 4 \times \frac{80 - 0}{2^3 - 1} = 45{,}7V$$

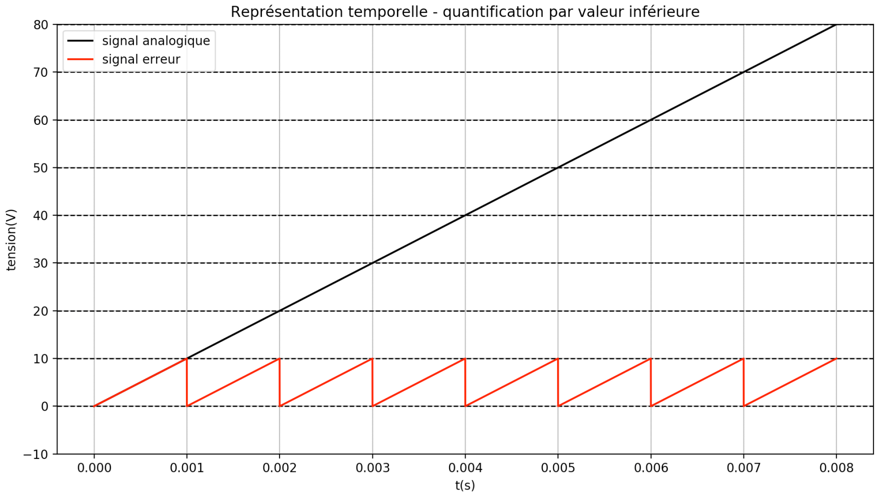
47. Déterminer la valeur quantifiée x attribuée, par valeur centrale, à la valeur échantillonnée $s_e = 44\ V$:

$$x = U_{CNA,min} + M_{(10)} \times q + \frac{q}{2} = 0 + 4 \times \frac{80 - 0}{2^3 - 1} + \frac{\frac{80 - 0}{2^3 - 1}}{2} = 51{,}4\ V$$

❖ **Erreur de quantification :**

48. Pour une quantification par valeur inférieure, déterminer la valeur de l'erreur de quantification sila valeur échantillonnée est $s_e = 44\,V$:

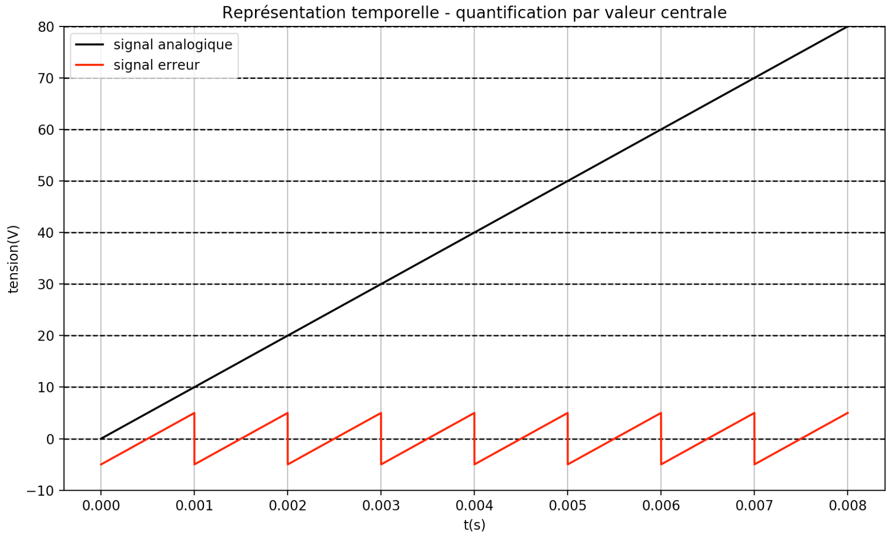
$$b = s_e - x = 44 - 45{,}7 = -1{,}70V$$



On donne ci-contre la représentation temporelle du signal erreur, pour une demi-période du signal analogique, avec quantification par valeur inférieure.

49. Proposer un encadrement pour l'erreur de quantification :

$$0 \leq b < q$$



On donne ci-contre la représentation temporelle du signal erreur, pour une demi-période du signal analogique, avec quantification par valeur centrale :

50. Proposer un encadrement pour l'erreur de quantification :

$$-\frac{q}{2} \leq b < \frac{q}{2}$$

51. Quelle règle de quantification permet d'obtenir une valeur efficace plus faible pour le signal d'erreur ?

La quantification par valeur inférieure donne un signal d'erreur non alternatif, d'amplitude $\frac{q}{2}$ et de valeur moyenne $\frac{q}{2}$.

La quantification par valeur centrale donne un signal d'erreur alternatif, d'amplitude $\frac{q}{2}$.

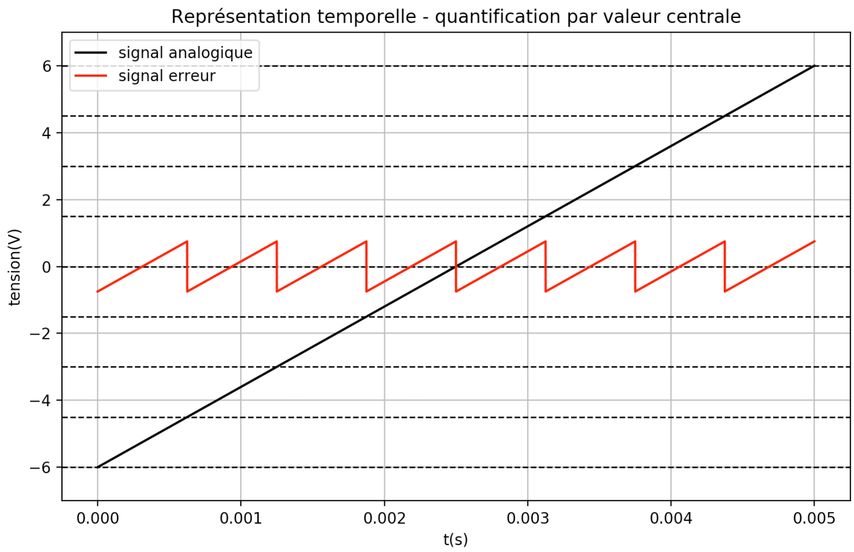
La règle de quantification par valeur centrale permet donc d'obtenir une valeur efficace plus faible pour le signal d'erreur.

52. Pour une même règle de quantification, comment évolue l'amplitude du signal d'erreur quand la résolution n du CAN augmente ?

L'amplitude du signal d'erreur $\frac{q}{2}$ diminue quand n du CAN augmente car $q = \frac{\Delta U}{2^n}$

Écouter les fichiers C06_instant_crush_44kHz_16bits.wav et C06_instant_crush_44kHz_8bits.wav pour se rendre compte de l'influence de n

❖ Rapport signal sur bruit :



Le **rapport signal sur bruit** d'un CAN idéal est défini pour un signal d'entrée triangulaire alternatif (signal analogique) dont la valeur crête à crête correspond à la tension pleine échelle du CAN. Le CAN procède par valeur centrale.

L'amplitude du signal d'entrée, notée U_m, est liée à la tension pleine échelle ΔU par la formule suivante :

$$2U_m = \Delta U$$

53. Démontrer que la puissance moyenne normalisée du signal d'entrée peut s'exprimer ainsi : $P_{signal} = \frac{{U_m}^2}{3}$

Le signal d'entrée est triangulaire et alternatif donc :

$$U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{3}}$$

La puissance moyenne normalisée du signal est, par définition :

$$P_{signal} = {U_{eff}}^2 \; donc \; P_{signal} = \left(\frac{U_m}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{{U_m}^2}{3}$$

54. Démontrer que la puissance moyenne normalisée du bruit (issu de l'erreur de quantification) peut s'exprimer ainsi : $P_{bruit} = \frac{q^2}{12}$

Le signal d'erreur est triangulaire et alternatif donc :

$$U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{3}}$$

Ici, on voit graphiquement que $U_m = \frac{q}{2}$. Donc $U_{eff} = \frac{q}{2\sqrt{3}}$

La puissance moyenne normalisée du bruit est, par définition :

$$P_{bruit} = {U_{eff}}^2 \; donc \; P_{bruit} = \left(\frac{q}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{q^2}{12}$$

55. Démontrer enfin que le rapport signal sur bruit en décibel peut s'exprimer ainsi : $SNR_{dB} \approx 6n$

$$\frac{P_{signal}}{P_{bruit}} = \frac{\frac{{U_m}^2}{3}}{\frac{q^2}{12}} = \frac{{U_m}^2}{q^2} \times 4 = \frac{{U_m}^2}{\left(\frac{2U_m}{2^n}\right)^2} \times 4 = \frac{{U_m}^2 \times (2^n)^2}{(U_m)^2} \times \frac{4}{4} = (2^n)^2 = 2^{2n}$$

$$SNR_{dB} = 10 \log \frac{P_{signal}}{P_{bruit}} = 10 \log(2^{2n})$$

$$SNR_{dB} = 10 \log(2^{2n})$$

$$SNR_{dB} = 10 \times 2n \times \log(2)$$

$$SNR_{dB} = 20\, n\, log(2) \approx \boldsymbol{6n}$$