Chapitre 07 – Impédances électriques. Adaptation d'impédances.

Activités et applications.

❖ Approximation des régimes quasi-stationnaires : domaine de validité en régime sinusoïdal forcé

L'approximation des régimes quasi-stationnaires consiste à dire que, l'intensité du courant est la même en tout point d'une branche de circuit.

Une variation d'intensité se propage à une vitesse proche de celle de la lumière dans le vide (notée c et égale à $c = 3{,}00 \times 10^8 m/s$), dans un fil de cuivre.

1. Pour un circuit électrique de l'ordre de grandeur d'un mètre $L = 1{,}00\ m$, calculer la durée de propagation notée Δt, d'une variation d'intensité :

$$\Delta t = \frac{L}{c} = \frac{1{,}00}{3{,}00 \times 10^8} = 3{,}33 \times 10^{-9} \sim 10^{-9} s$$

Il faut donc environ $\Delta t \sim 10^{-9} s$ à la variation de l'intensité pour se propager dans un circuit d'un mètre.

2. On souhaite avoir, en deux points d'un circuit en série, la même valeur d'intensité à un instant donné : comparer T (la période du signal d'entrée) à la durée de propagation Δt pour que ce souhait soit réalisé.

Si la période T du GBF (et donc, de l'intensité dans le circuit) est inférieure à la durée de la propagation Δt, la valeur de l'intensité en un point du circuit, varie donc plus « vite » qu'elle ne se propage dans le circuit.
La conséquence serait qu'en deux points du circuit en série, nous n'aurions plus la même valeur d'intensité à un instant donné.
Il faut donc que :

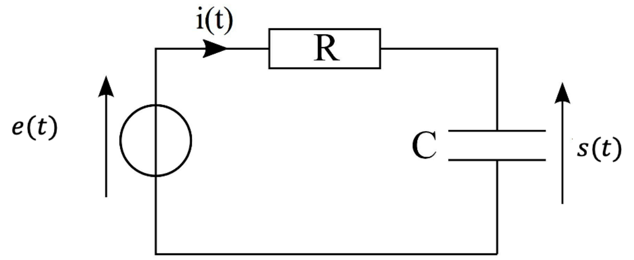
$$T \gg \Delta t$$
$$T \gg 10^{-9} s$$

3. En déduire la valeur maximale de la fréquence du signal d'entrée (pour un circuit d'un mètre) :

$$\frac{1}{T} \ll \frac{1}{10^{-9}}$$

$$f \ll 10^9\ Hz$$

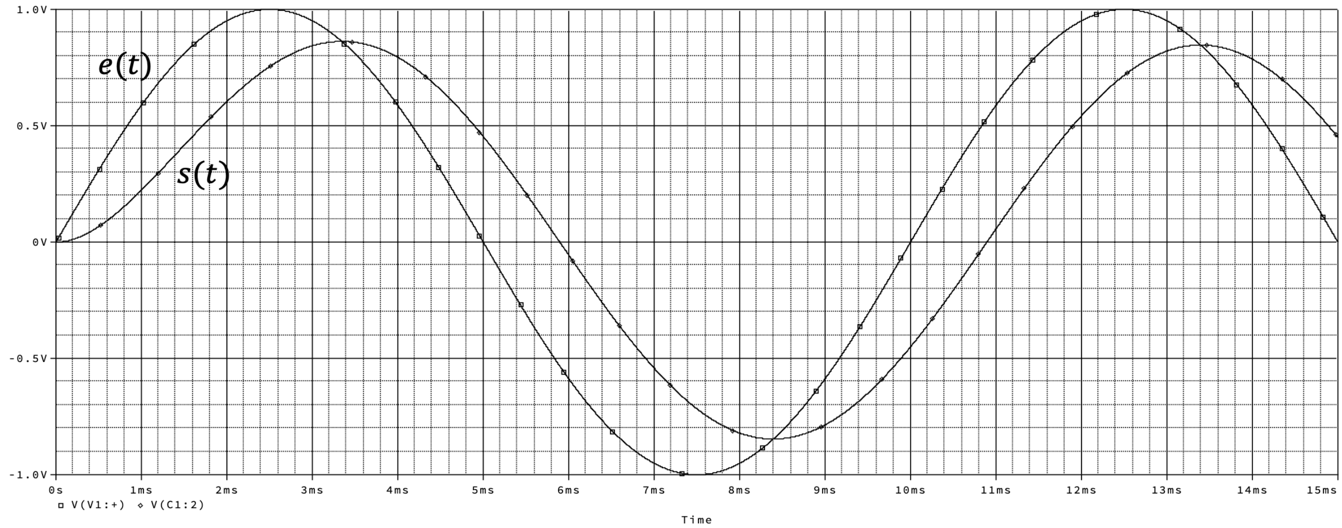
❖ Étude du dipôle condensateur :



On place dans un circuit en série, un GBF qui impose un signal d'entrée sinusoïdal alternatif de fréquence $f = 100\ Hz$, et d'amplitude $E = 1{,}0\ V$.

Le condensateur a une capacité $C = 1\ \mu$F et le conducteur ohmique a une résistance $R = 1\ k\Omega$.

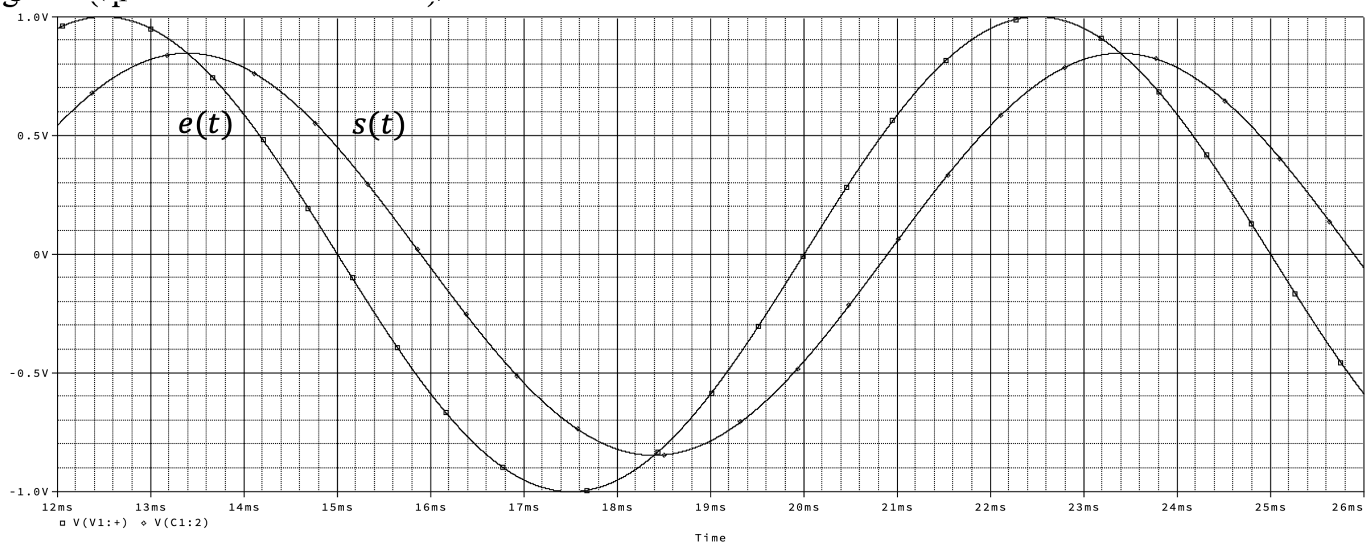
On obtient expérimentalement les représentations temporelles des signaux :



4. Que remarque-t-on sur la forme du motif de la tension aux bornes du condensateur au début de l'expérience ? Comment appelle-t-on ce régime ? Quelle est sa durée caractéristique ?

Le tension $s(t)$ ne possède pas un motif sinusoïdal au départ de l'expérience : son expression temporelle ne peut donc pas s'exprimer en fonction de « $\cos(200\pi t)$ ».
On observe le régime transitoire dont la durée caractéristique est la durée de réponse à 5%.

Une fois le régime transitoire terminé, on obtient expérimentalement les représentations temporelles des signaux (après une durée de 10 ms) :



5. Le signal de sortie possède-t-il alors le même motif que le signal d'entrée ? Comment appelle-t-on ce régime ?

Le signal de sortie possède le même motif que le signal d'entrée : c'est le régime sinusoïdal forcé.

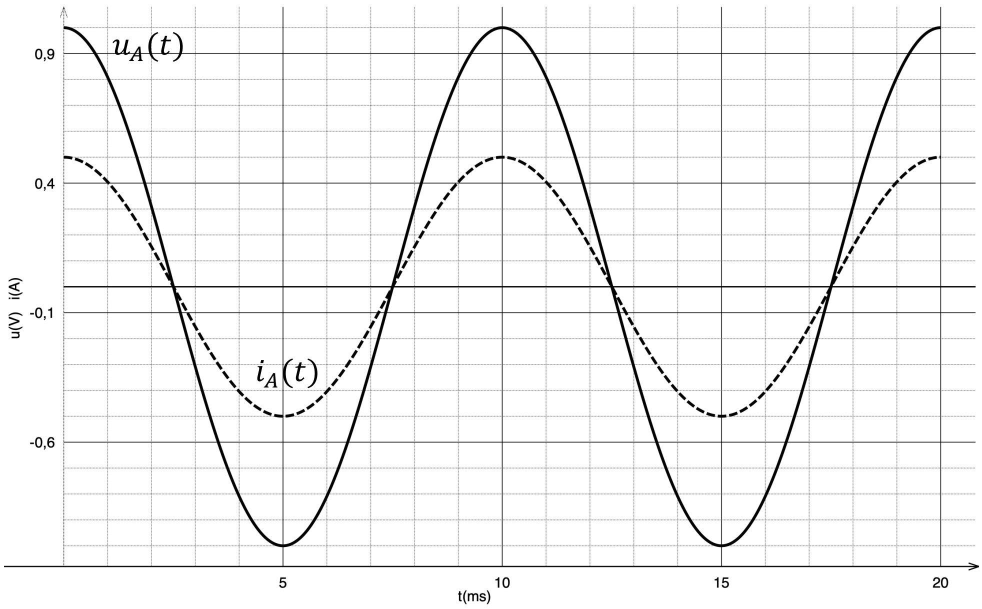
Notation des nombres complexes en Physique :

Soit le nombre complexe $\underline{z}$

Forme algébrique	Forme trigonométrique
$a + j\,b$ est appelé la forme algébrique du nombre complexe. a est appelé la partie réelle du nombre complexe: on note $a = Re\,(\underline{z})$ b est appelé la partie imaginaire du nombre complexe : on note $b = Im\,(\underline{z})$ j est tel que $j^2 = -1$ et $\frac{1}{j} = -j$	$\lvert\underline{z}\rvert e^{j\alpha}$ est appelé la forme trigonométrique du nombre complexe. $\lvert\underline{z}\rvert$ est appelé le module du nombre complexe. α est appelé l'argument du nombre complexe avec $\arg(\underline{z}) = \alpha$ On a : $\lvert\underline{z}\rvert = z = \sqrt{a^2 + b^2}$

❖ **Signaux réels et complexes :**

Dipôle A :



6. A l'aide des chronogrammes du dipôle A, déterminer les expressions temporelles réelles de u_A et i_A , puis les expressions temporelles complexes de $\underline{u_A}$ et $\underline{i_A}$:

Notation réelle	Notation complexe
$i_A = 0{,}50 \times \cos(200\pi \times t)$	$\underline{i_A} = 0{,}50 \times e^{j200\pi t}$
$u_A = 1{,}0 \times \cos(200\pi \times t)$	$\underline{u_A} = 1{,}0 \times e^{j200\pi t}$

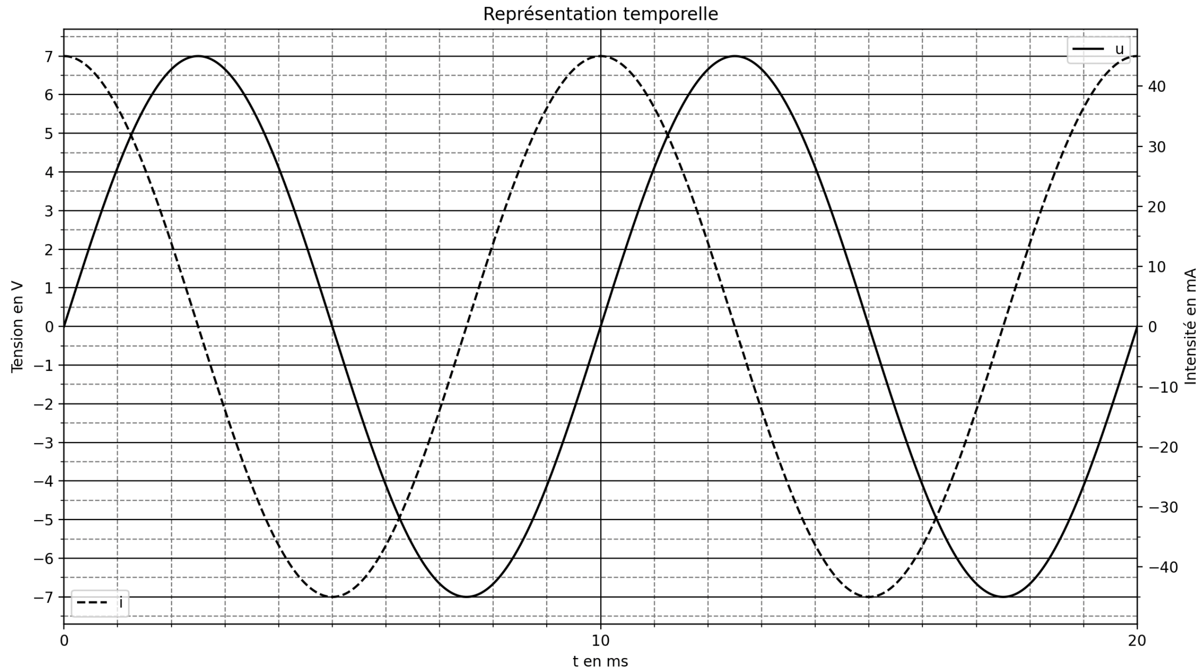
On rappelle que $\boldsymbol{e^{jx} = cos(x) + j \times sin(x)}$

7. Démontrer que la partie réelle de $\underline{i_A}$ correspond à l'expression temporelle de i_A :

$$\underline{i_A} = 0{,}50 \times e^{j200\pi t} = 0{,}50 \times (\cos 200\pi t + j \times \sin 200\pi t)$$

$$\underline{i_A} = \boxed{0{,}50 \times cos\,200\pi t} + j \times 0{,}50 \times sin\,200\pi t$$

Dipôle B :



8. A l'aide des chronogrammes du dipôle B, déterminer les expressions temporelles réelles de u_B et i_B , puis les expressions temporelles complexes de $\underline{u_B}$ et $\underline{i_B}$

Notation réelle	Notation complexe
$i_B = 45 \times 10^{-3} \times \cos(200\pi \times t)$	$\underline{i_B} = 45 \times 10^{-3} \times e^{j200\pi t}$
$u_B = 7{,}0 \times \cos\left(200\pi \times t - \frac{\pi}{2}\right)$	$\underline{u_B} = 7{,}0 \times e^{j(200\pi t - \frac{\pi}{2})}$

9. Déterminer les valeurs numériques des grandeurs suivantes : $\frac{u_A}{i_A}$ et $\frac{u_B}{i_B}$

$$\frac{u_A}{i_A} = \frac{1{,}0 \times \cos(200\pi \times t)}{0{,}50 \times \cos(200\pi \times t)} = 2{,}00\ \Omega$$

$$\frac{u_B}{i_B} = \frac{7{,}0 \times \cos\left(200\pi \times t - \frac{\pi}{2}\right)}{45 \times 10^{-3} \times \cos(200\pi \times t)} \rightarrow pb\ mathématique\ ...\ résolvable\ mais\ long$$

La présence d'un déphasage entre $u_B\ et\ i_B$ justifie l'utilisation des complexes.

On rappelle que $e^{j(x+y)} = e^{jx} \times e^{jy}$

10. Déterminer les valeurs numériques des grandeurs suivantes : $\frac{\underline{u_A}}{\underline{i_A}}$ et $\frac{\underline{u_B}}{\underline{i_B}}$

$$\frac{\underline{u_A}}{\underline{i_A}} = \frac{1{,}0 \times e^{j200\pi t}}{0{,}50 \times e^{j200\pi t}} = 2{,}00\ \Omega$$

$$\frac{\underline{u_B}}{\underline{i_B}} = \frac{7{,}0 \times e^{j(200\pi t - \frac{\pi}{2})}}{45 \times 10^{-3} \times e^{j200\pi t}} = \frac{7{,}0 \times e^{j200\pi t} \times e^{-j\frac{\pi}{2}}}{45 \times 10^{-3} \times e^{j200\pi t}} = \frac{7{,}0 \times e^{-j\frac{\pi}{2}}}{45 \times 10^{-3}} = 156 \times e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

11. En déduire l'expression des impédances complexes $\underline{Z_A}$ et $\underline{Z_B}$:

$$\underline{Z_A} = \frac{\underline{u_A}}{\underline{i_A}} = 2{,}00\ \Omega$$

$$\underline{Z_B} = \frac{\underline{u_B}}{\underline{i_B}} = 156 \times e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

12. A quelle grandeur physique correspond l'argument de $\underline{Z_B}$? A quelle grandeur physique correspond le module de $\underline{Z_B}$?

$$\underline{Z_B} = \boxed{\left|\underline{Z_B}\right|} \times e^{\boxed{j\alpha}}$$

$$\underline{Z_B} = \boxed{156} \times e^{\boxed{-j\frac{\pi}{2}}}$$

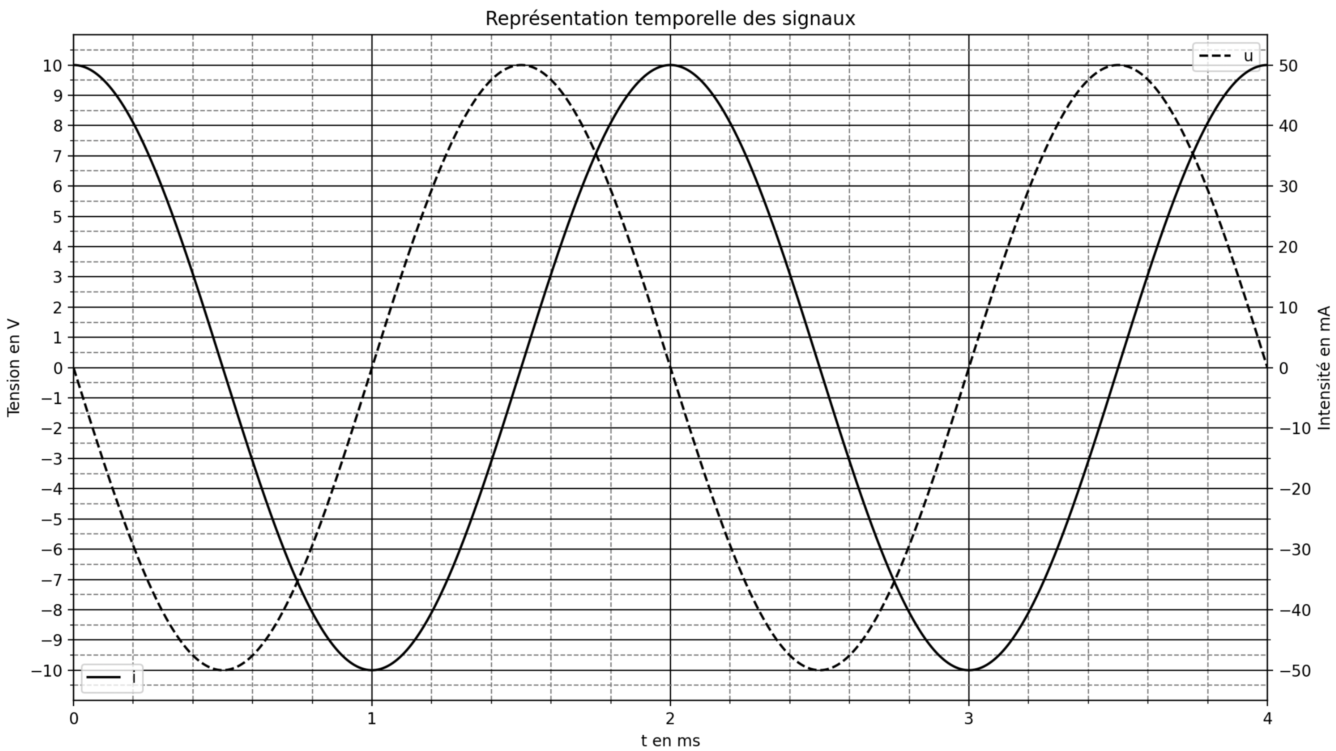
Par identification :

$$\left|\underline{Z_B}\right| = 156\ \Omega = \frac{U_m}{I_m}$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} = \phi$$

Dipôle C :

13. A l'aide des chronogrammes des signaux pour le dipôle C, déterminer l'expression de l'impédance complexe $\underline{Z_C}$:



$$\underline{i_C} = 50 \times 10^{-3} \times e^{j1000\pi t}$$

$$\underline{u_C} = 10 \times e^{j(1000\pi t + \frac{\pi}{2})}$$

Donc :

$$\underline{Z_C} = \frac{\underline{u_C}}{\underline{i_C}} = \frac{10 \times e^{j(1000\pi t+\frac{\pi}{2})}}{50 \times 10^{-3} \times e^{j1000\pi t}} = \frac{10 \times e^{j1000\pi t} \times e^{j\frac{\pi}{2}}}{50 \times 10^{-3} \times e^{j1000\pi t}} = \frac{10 \times e^{j\frac{\pi}{2}}}{50 \times 10^{-3}}$$

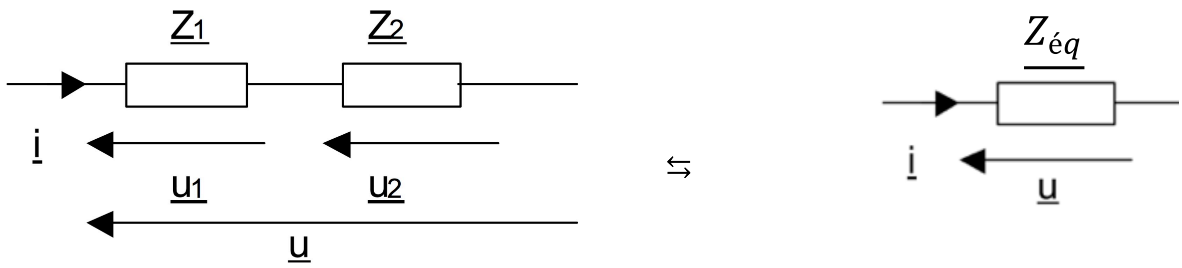
$$\underline{Z_C} = 200 \times e^{j\frac{\pi}{2}}$$

14. A l'aide de la fiche méthode 20, identifier les dipôles A, B et C :

Dipôle A= caractère résistif (pour cette fréquence)
Dipôle B= caractère inductif (pour cette fréquence)
Dipôle C = caractère capacitif (pour cette fréquence)

❖ Association en série d'impédances complexes :

On place deux impédances complexes $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_2}$ placées en série. On cherche à déterminer l'impédance complexe équivalente $\underline{Z_{éq}}$ à l'ensemble de ces deux impédances :



$$\underline{u} = \underline{Z_{éq}} \times \underline{i}$$

$$\underline{u} = \underline{u_1} + \underline{u_2}$$

15. A l'aide de la loi des mailles et de lois d'Ohm généralisées, démontrer que $\underline{Z_{éq}} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2}$:

D'après la loi des mailles :

$$\underline{u} = \underline{u_1} + \underline{u_2} \quad (1)$$

D'après la loi d'Ohm généralisée :

$$\underline{u_1} = \underline{Z_1} \times \underline{i}$$
$$\underline{u_2} = \underline{Z_2} \times \underline{i}$$

$\underline{i}$ étant le même en tout point dans un circuit en série.

On remplace alors dans (1) :

$$\underline{u} = \underline{Z_1} \times \underline{i} + \underline{Z_2} \times \underline{i}$$

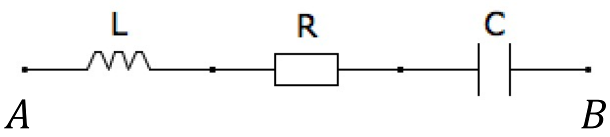
On factorise par $\underline{i}$:

$$\underline{u} = (\underline{Z_1} + \underline{Z_2}) \times \underline{i}$$

Par identification avec la formule $\underline{u} = \underline{Z_{éq}} \times \underline{i}$, on obtient alors :

$$\underline{Z_{éq}} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2}$$

16. Déterminer l'impédance complexe $\underline{Z_{éq}}$ du dipôle AB suivant :

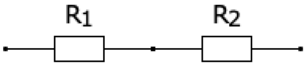
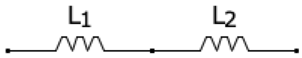
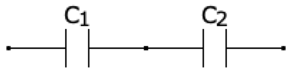
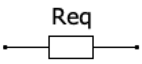
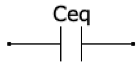


$$\underline{Z_{éq}} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Z_k} = \underline{Z_R} + \underline{Z_C} + \underline{Z_L}$$

$$\underline{Z_{éq}} = R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega$$

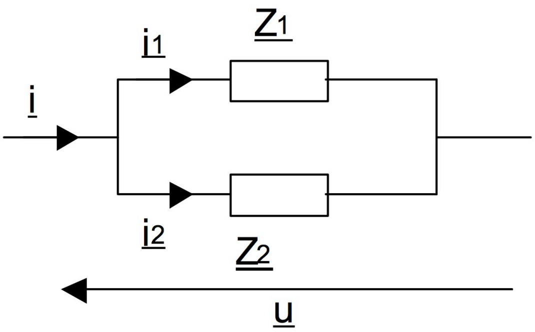
$$\underline{Z_{éq}} = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})$$

17. Compléter le tableau suivant :

Dipôles en série			
Dipôle équivalent	 $\underline{Z_{éq}} = R_{éq}$	 $\underline{Z_{éq}} = jL_{éq}\omega$	 $\underline{Z_{éq}} = \dfrac{1}{jC_{eq}\omega}$
Impédance complexe équivalente $\underline{Z_{éq}}$	$\underline{Z_{éq}} = \underline{Z_{R1}} + \underline{Z_{R2}}$ $\underline{Z_{éq}} = R_1 + R_2$	$\underline{Z_{éq}} = \underline{Z_{L1}} + \underline{Z_{L2}}$ $\underline{Z_{éq}} = jL_1\omega + jL_2\omega$	$\underline{Z_{éq}} = \underline{Z_{C1}} + \underline{Z_{C2}}$ $\underline{Z_{éq}} = \dfrac{1}{jC_1\omega} + \dfrac{1}{jC_2\omega}$
Résistance, inductance ou capacité équivalente	$R_{éq} = R_1 + R_2$	$jL_{éq}\omega = jL_1\omega + jL_2\omega$ $L_{éq} = L_1 + L_2$	$\dfrac{1}{jC_{eq}\omega} = \dfrac{1}{jC_1\omega} + \dfrac{1}{jC_2\omega}$ $\dfrac{1}{C_{eq}} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}$

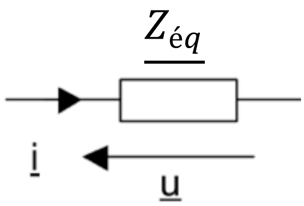
- **Association en parallèle (ou dérivation) d'impédances complexes :**

On place deux impédances complexes $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_2}$ placées en parallèle. On cherche à déterminer l'impédance complexe équivalente $\underline{Z_{éq}}$ à l'ensemble de ces deux impédances :



$\underline{u} = \underline{u_1} = \underline{u_2}$

⇆



$\underline{i} = \dfrac{1}{\underline{Z_{éq}}} \times \underline{u}$

18. A l'aide de la loi des nœuds et de lois d'Ohm généralisées, démontrer que $\frac{1}{\underline{Z_{éq}}} = \frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}}$

D'après la loi des nœuds :

$$\underline{i} = \underline{i_1} + \underline{i_2} \quad (2)$$

D'après la loi d'Ohm généralisée :

$$\underline{u} = \underline{Z_1} \times \underline{i_1}\ donc\ \underline{i_1} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z_1}}$$

$$\underline{u} = \underline{Z_2} \times \underline{i_2}\ donc\ \underline{i_2} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z_2}}$$

On remplace alors dans (2) :

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z_1}} + \frac{\underline{u}}{\underline{Z_2}}$$

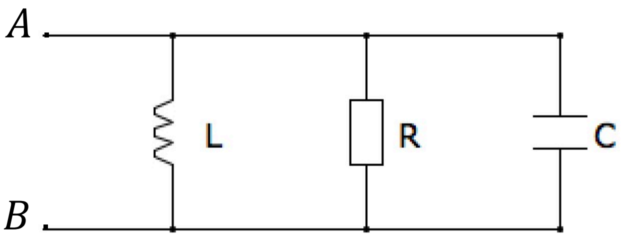
On factorise par $\underline{u}$:

$$\underline{i} = \left(\frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}}\right)\underline{u}$$

Par identification avec la formule $\underline{i} = \frac{1}{\underline{Z_{éq}}} \times \underline{u}$, on obtient alors :

$$\frac{1}{\underline{Z_{éq}}} = \frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}}$$

19. Déterminer l'impédance équivalente $\underline{Z_{éq}}$ de l'ensemble d'impédances suivant :



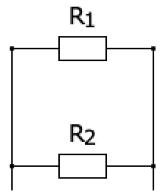
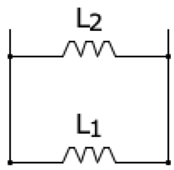
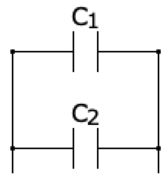
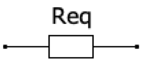
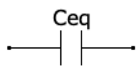
$$\frac{1}{\underline{Z_{éq}}} = \frac{1}{\underline{Z_R}} + \frac{1}{\underline{Z_C}} + \frac{1}{\underline{Z_L}}$$

$$\frac{1}{\underline{Z_{éq}}} = \frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega}$$

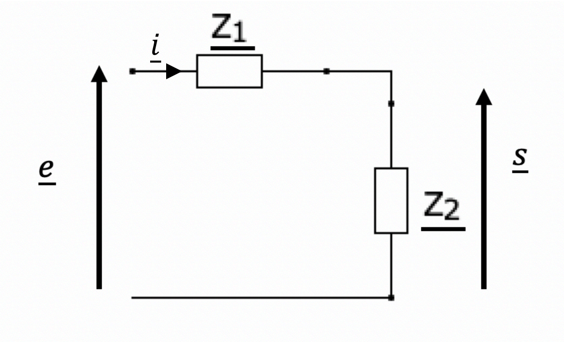
Donc :

$$\underline{Z_{éq}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega}}$$

20. Compléter le tableau suivant :

Dipôles en dérivation			
Dipôle équivalent	 $\underline{Y_{éq}} = \frac{1}{R_{éq}}$	 $\underline{Y_{éq}} = \frac{1}{jL_{éq}\omega}$	 $\underline{Y_{éq}} = jC_{eq}\omega$
Admittance complexe équivalente $\underline{Y_{éq}}$	$\underline{Y_{éq}} = \underline{Y_{R1}} + \underline{Y_{R2}}$ $\underline{Y_{éq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$	$\underline{Y_{éq}} = \underline{Y_{L1}} + \underline{Y_{L2}}$ $\underline{Y_{éq}} = \frac{1}{jL_1\omega} + \frac{1}{jL_2\omega}$	$\underline{Y_{éq}} = \underline{Y_{C1}} + \underline{Y_{C2}}$ $\underline{Y_{éq}} = jC_1\omega + jC_2\omega$
Résistance, inductance ou capacité équivalente	$\frac{1}{R_{éq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$	$\frac{1}{jL_{éq}\omega} = \frac{1}{jL_1\omega} + \frac{1}{jL_2\omega}$ $\frac{1}{L_{éq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$	$jC_{eq}\omega = jC_1\omega + jC_2\omega$ $C_{eq} = C_1 + C_2$

❖ Formule du pont diviseur de tension : cas de deux impédances en série



Le système est constitué de deux impédances complexes $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_2}$ placées en série.

21. Démontrer que la tension aux bornes de l'impédance $\underline{Z_2}$, notée $\underline{s}$, en fonction de la tension $\underline{e}$ aux bornes de l'ensemble des deux impédances a pour expression :

$$\underline{s} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}} \times \underline{e}$$

D'après la loi des mailles :

$$\underline{e} = \underline{u_1} + \underline{s} \quad (1)$$

$\underline{u_1}$: tension aux bornes de $\underline{Z_1}$, en convention récepteur

D'après la loi d'Ohm généralisée :

$$\underline{u_1} = \underline{Z_1} \times \underline{i}$$
$$\underline{s} = \underline{Z_2} \times \underline{i}$$

$\underline{i}$ étant le même en tout point dans un circuit en série.

On remplace alors dans (1) :

$$\underline{e} = \underline{Z_1} \times \underline{i} + \underline{Z_2} \times \underline{i}$$

On factorise par $\underline{i}$:

$$\underline{e} = (\underline{Z_1} + \underline{Z_2}) \times \underline{i}$$

Il vient alors :

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}$$

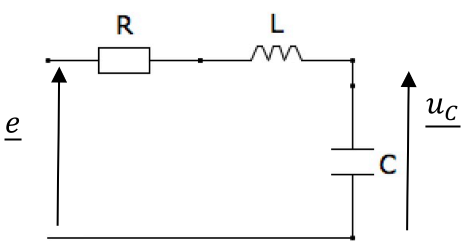
D'après la loi d'Ohm généralisée :

$$\underline{s} = \underline{Z_2} \times \underline{i}$$

On obtient alors :

$$\underline{s} = \underline{Z_2} \times \underline{i} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}} \times \underline{e}$$

22. A l'aide d'un pont diviseur de tension, déterminer l'expression littérale de la tension $\underline{u_C}$ aux bornes du condensateur en fonction de la tension $\underline{e}$:



$$\underline{u_C} = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_C} + \underline{Z_L}} \times \underline{e}$$

$$\underline{Z_R} + \underline{Z_C} + \underline{Z_L} = R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega$$

$$\underline{u_C} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} \times \underline{e}$$

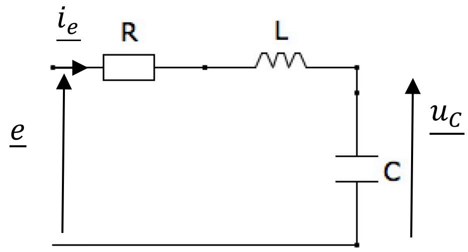
On multiplie par $jC\omega$ en haut et en bas :

$$\underline{u_C} = \frac{1}{RjC\omega + 1 - LC\omega^2} \times \underline{e}$$

$$\underline{u_C} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} \times \underline{e}$$

❖ **Impédance d'entrée du système RLC :**

23. Déterminer l'expression de l'impédance d'entrée $\underline{Z_E}$ du système RLC :



$$\underline{Z_E} = \frac{\underline{e}}{\underline{i_e}} \quad quand\ \underline{i_s} = 0\ A$$

$\underline{e}$ est la tension aux bornes des 3 dipôles en série, donc :

$$\underline{Z_E} = \underline{Z_{éq}} = R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega$$

24. Pour un signal sinusoïdal alternatif de fréquence $100\ Hz$, déterminer la valeur de l'impédance d'entrée Z_E du système RLC ayant les caractéristiques suivantes $R = 10\ \Omega;\ C = 10\ nF\ et\ L = 1{,}0\ H$:

$$\underline{Z_E} = R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega \iff \underline{Z_E} = R + \frac{-j}{C\omega} + jL\omega \iff \underline{Z_E} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

On cherche le module de l'impédance complexe :

$$\left|\underline{Z_E}\right| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

Application numérique :

$$Z_E = \sqrt{10^2 + \left(1{,}0 \times 2\pi \times 100 - \frac{1}{10 \times 10^{-9} \times 2\pi \times 100}\right)^2}$$

$$Z_E = 158{,}5\ k\Omega$$

❖ **Adaptation d'impédances en tension :**

25. Y a-t-il adaptation d'impédances en tension lorsque l'on branche le GBF Hameg aux bornes du système RLC précédent ? Justifier votre réponse.

$$Z_s = 50\Omega \text{ et } Z_E = 158{,}5\ k\Omega$$

Il y a adaptation d'impédances en tension car $Z_E \gg Z_S$.

26. Y a-t-il adaptation d'impédances en tension lorsque l'on branche le GBF Hameg aux bornes d'un conducteur ohmique de résistance $R = 50\Omega$? Justifier votre réponse.

$$Z_s = 50\Omega \text{ et } Z_E = Z_R = 50\Omega$$

Il n'y a pas adaptation d'impédances en tension car $Z_E = Z_S$.

❖ **Adaptation d'impédances en puissance :**

27. Y a-t-il adaptation d'impédances en puissance lorsque l'on branche le GBF Hameg aux bornes du système RLC précédent (la charge est l'ensemble des dipôles en serie) ? Justifier votre réponse.

$$Z_s = 50\Omega \text{ et } Z_L = 158{,}5\ k\Omega$$

Il n'y a pas adaptation d'impédances en puissance car $Z_S \neq Z_L$.

28. Y a-t-il adaptation d'impédances en puissance lorsque l'on branche le GBF Hameg aux bornes d'un conducteur ohmique de résistance $R = 50\Omega$? Justifier votre réponse.

$$Z_s = 50\Omega \text{ et } Z_L = Z_R = 50\Omega$$

Il y a adaptation d'impédances en puissance car $Z_S = Z_L$.