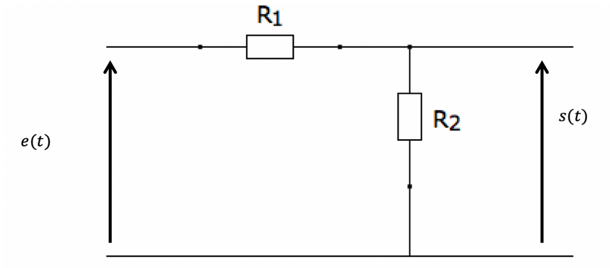
Chapitre 08 - Transmittance isochrone (ou fonction de transfert) d'un système linéaire

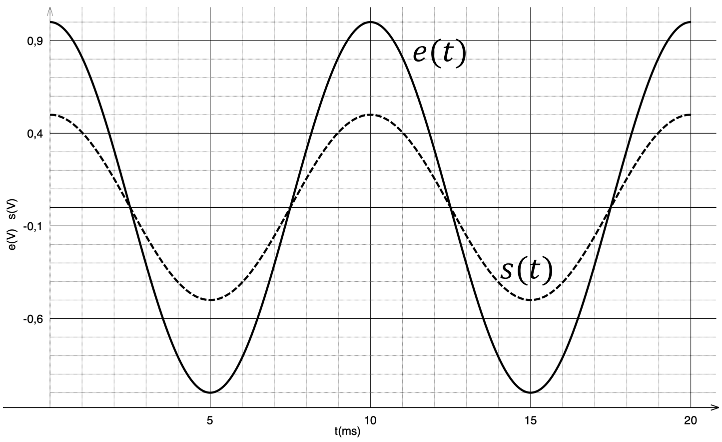
Activités et applications

❖ Étude d'un circuit en série contenant deux conducteurs ohmiques :



On réalise le circuit suivant dont le signal d'entrée est sinusoïdal alternatif de fréquence $f = 100\,Hz$, et d'amplitude $E = 1{,}0\,V$. On prend $R_1 = 1{,}00\,k\Omega$ et $R_2 = 1{,}00\,k\Omega$.

La voie 1 de l'oscilloscope permet de visualiser le signal d'entrée $e(t)$. La voie 2 de l'oscilloscope permet de visualiser le signal de sortie $s(t)$.



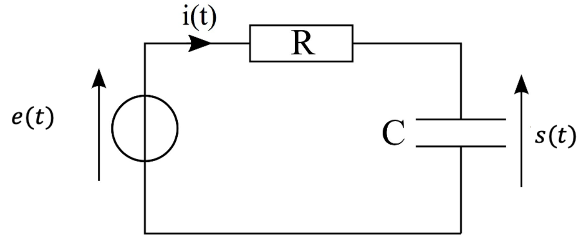
On obtient les représentations temporelles des signaux ci-contre.

1. Déterminer les expressions numériques temporelles complexes des signaux $\underline{e(t)}$ et $\underline{s(t)}$:

2. Déterminer la valeur de la transmittance isochrone complexe $\underline{T}(j200\pi)$ de ce système, pour une fréquence du signal d'entrée $f = 100\,Hz$:

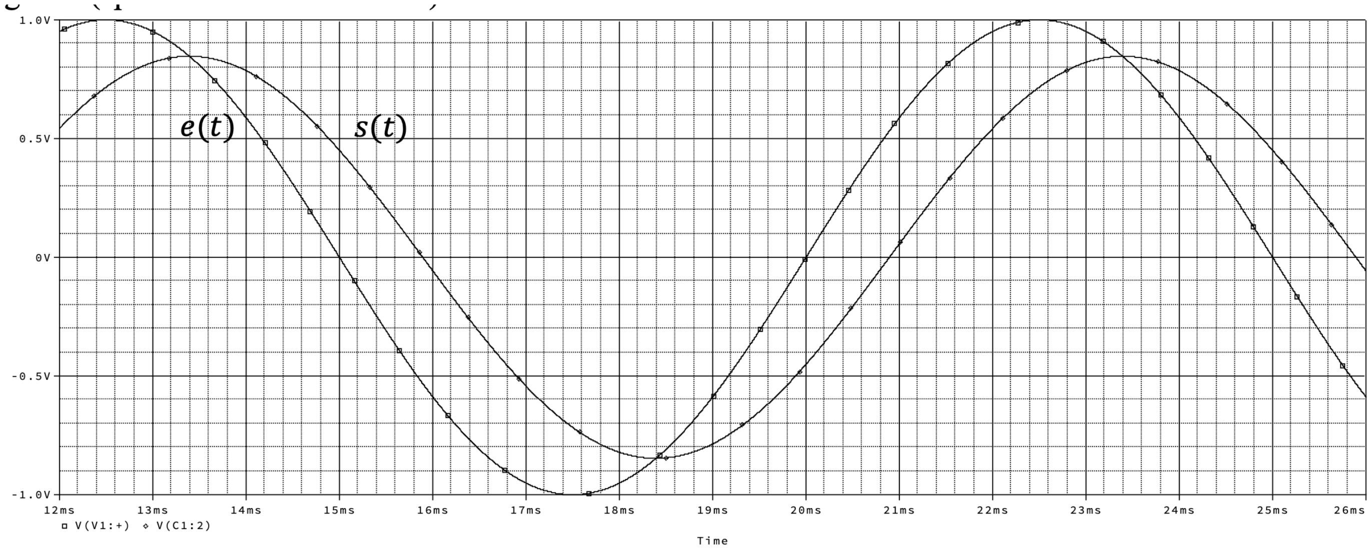
3. Augmenter la fréquence du signal d'entrée jusqu'à $f = 10\,kHz$: la valeur de la transmittance isochrone complexe $\underline{T}(j\omega)$ dépend-elle de la fréquence/ de la pulsation du signal d'entrée ? Étudie-t-on un filtre ici ?

❖ Étude du système $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$:



On place dans un circuit en série un GBF qui impose un signal d'entrée sinusoïdal alternatif de fréquence $f = 100\,Hz$, et d'amplitude $E = 1{,}0\,V$. Le condensateur a une capacité $C = 1\,\mu$F et le conducteur ohmique a une résistance $R = 1\,k\Omega$.

Une fois le régime transitoire terminé, on obtient expérimentalement les représentations temporelles des signaux (après une durée de 10 ms) :



4. Le signal de sortie possède-t-il alors le même type de motif que le signal d'entrée ? Comment appelle-t-on le régime observé ?

5. Déterminer l'amplitude U_m et la phase à l'origine φ du signal de sortie

6. Déterminer les expressions numériques temporelles complexes des signaux $\underline{e(t)}$ et $\underline{s(t)}$:

7. Déterminer la valeur de la transmittance isochrone complexe $\underline{T}(j200\pi)$ de ce système, pour une fréquence du signal d'entrée $f = 100\ Hz$:

8. A quelle grandeur physique correspond l'argument de $\underline{T}(j200\pi)$? A quelle grandeur physique correspond le module $\underline{T}(j200\pi)$?

9. Augmenter la fréquence du signal d'entrée jusqu'à $f = 10\ kHz$: la valeur de la transmittance isochrone dépend-elle de la fréquence/ de la pulsation du signal d'entrée ? Étudie-t-on un filtre ici ?

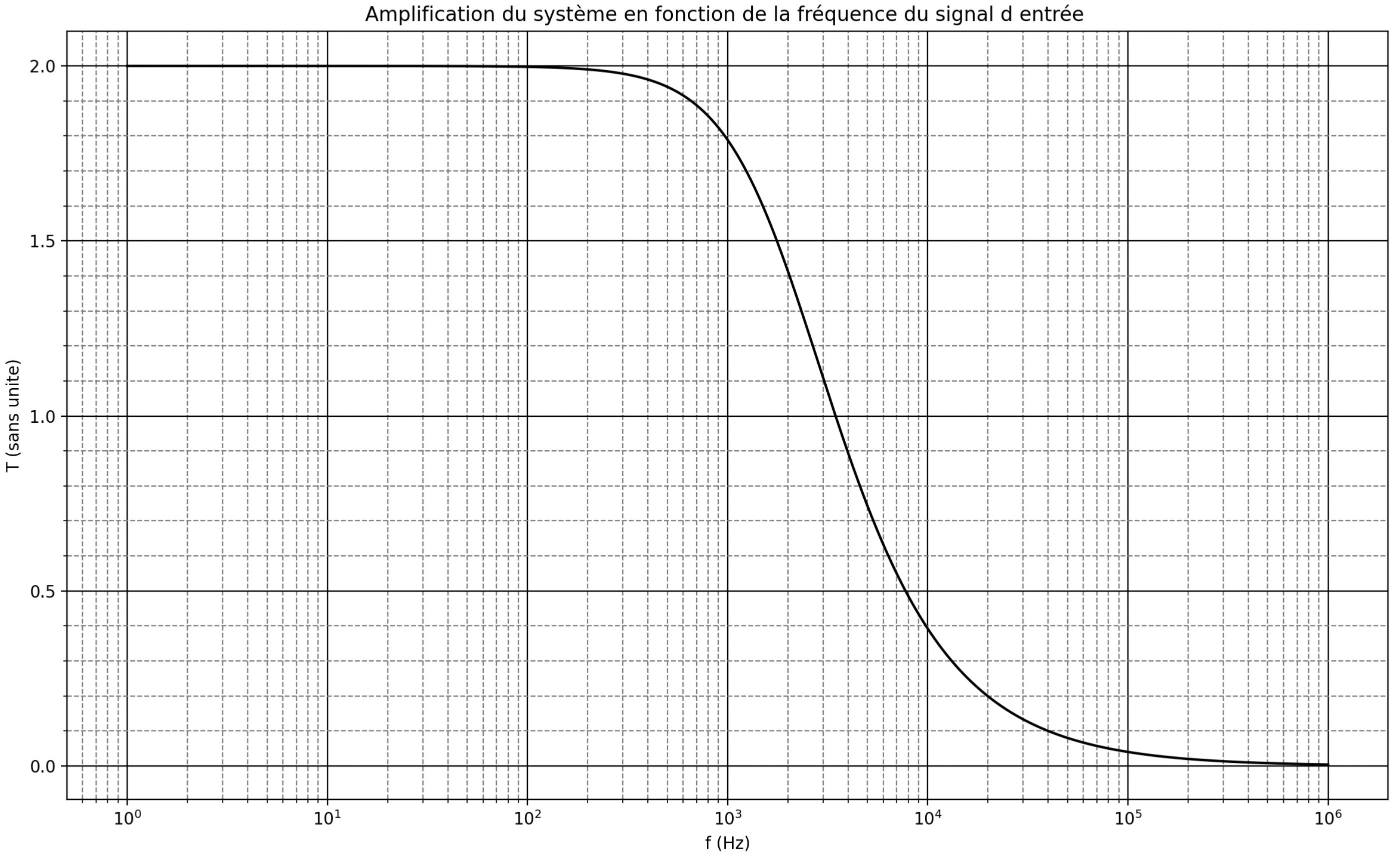
La valeur de la transmittance isochrone dépend donc la fréquence/ de la pulsation du signal d'entrée :

$$\lim_{f \to +\infty} T(f) = \quad et \ \lim_{f \to 0} T(f) =$$

10. Si l'on souhaite connaitre la forme trigonométrique de $\underline{T}(j\omega)$ pour chaque pulsation possible du signal d'entrée, combien de représentations temporelles de $e(t)\ et\ s(t)$ nous faudrait-il ?

- **Exploitation graphique de $T(f)$:**

On étudie un système A dans la courbe de l'amplification en fonction de la fréquence est donnée ci-dessous :

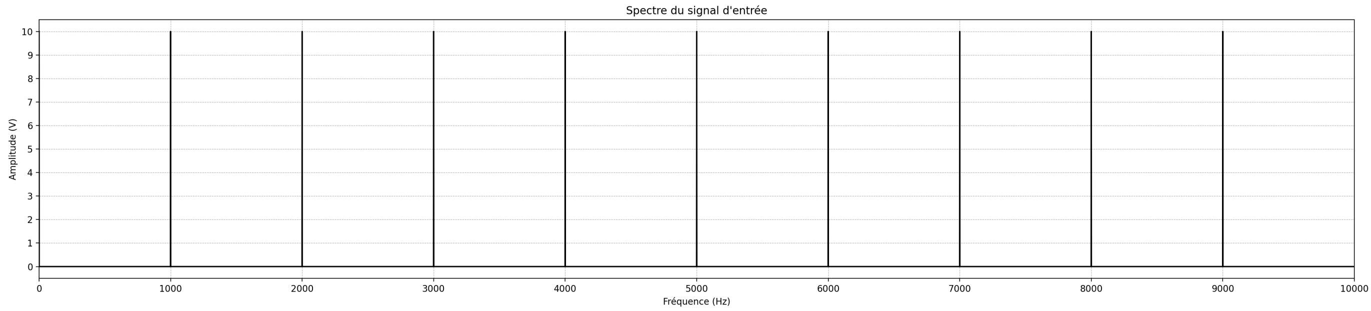


11. Déterminer la nature du filtrage réalisé par ce système A.

12. Déterminer graphiquement la valeur de $|T_0|$ et indiquer le nom de T_0 :

❖ Qu'est-ce que la fréquence de coupure à $-3\ dB$ d'un système filtrant réel ?

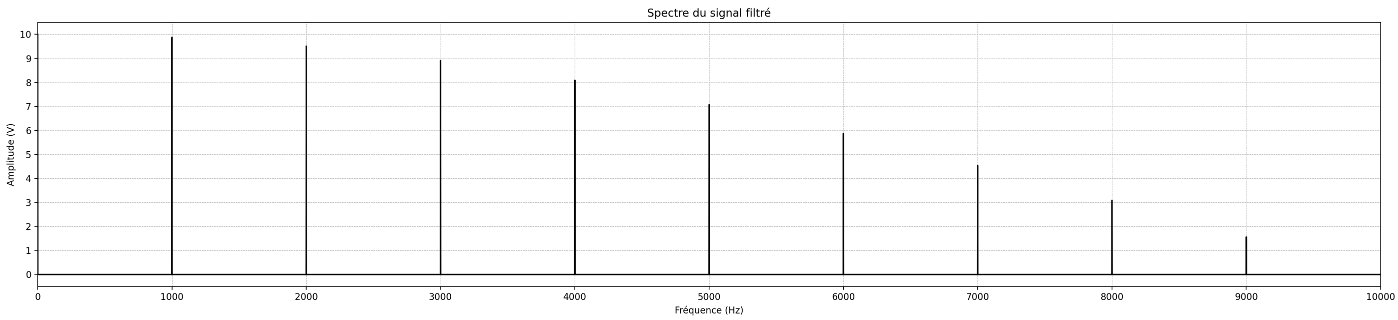
On étudie le signal dont la représentation fréquentielle est donnée ci-dessous.



Il est placé à l'entrée d'un système passe-bas idéal dont l'amplification statique T_0 est égale à 1,0 et dont la fréquence de coupure est $f_C = 5000\ Hz$.

13. Tracer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre :

L'enseignant exécute un script Python permettant d'obtenir le spectre du signal en sortie d'un filtre passe-bas réel (ordre 01) dont l'amplification statique T_0 est égale à 1,0 et dont la fréquence de coupure est $f_C = 5000\ Hz$.



14. Observe-t-on une coupure « nette » des harmoniques de rang supérieur à 6 ? L'amplitude de l'harmonique de rang 5 a-t-elle été modifiée par le filtre ?

15. A l'aide des curseurs, relever les amplitudes $A_{5,S}$ et $A_{5,E}$ puis calculer le rapport $\frac{A_{5,S}}{A_{5,E}}$

16. Comparer cette valeur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et conclure :

Pour un système passe-bas réel dont l'amplification statique T_0 est égale à 1,0 , l'amplitude du signal sinusoïdal alternatif est divisé par $\sqrt{2}$ à la sortie, lorsque sa fréquence correspond à la fréquence de coupure du système.

17. Déterminer graphiquement la fréquence de coupure à $-3dB$ du système A précédent :

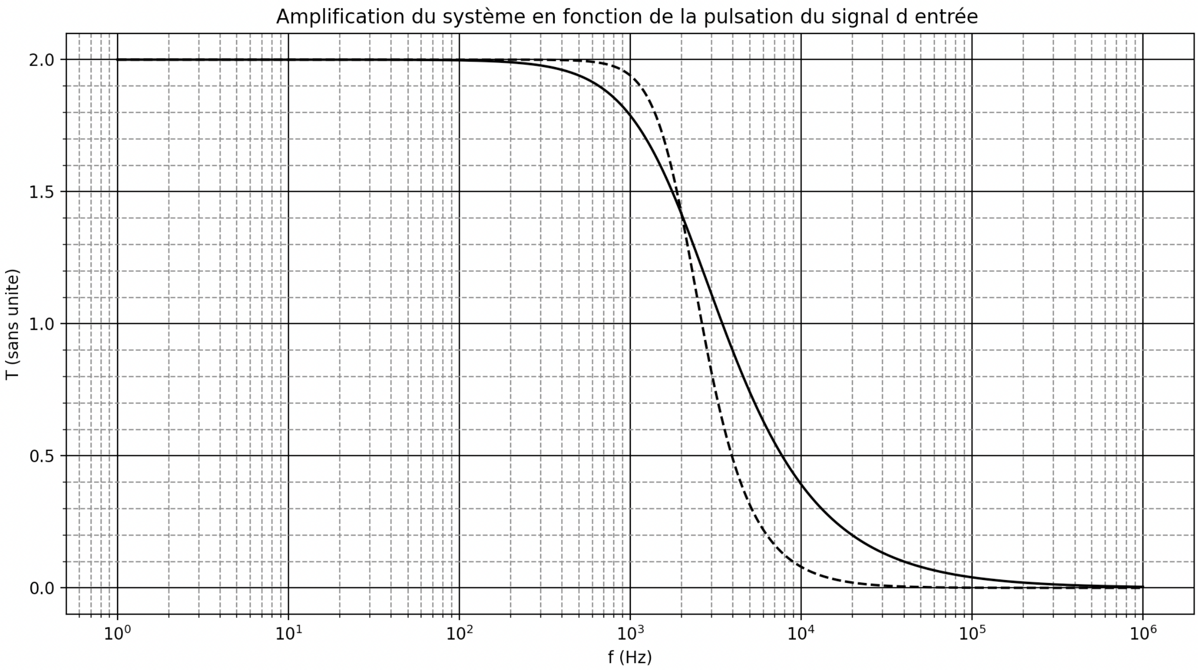
18. En déduire la bande passante du système et la largeur de la bande passante de système :

❖ Qu'est-ce que l'ordre d'un système filtrant réel ?

Dans la précédente simulation, l'enseignant augmente l'ordre du système passe-bas réel sans modifier la fréquence de coupure $f_C = 5000\ Hz$.

19. Comment évolue l'atténuation des hautes fréquences lorsque l'ordre d'un filtre passe-bas augmente ?

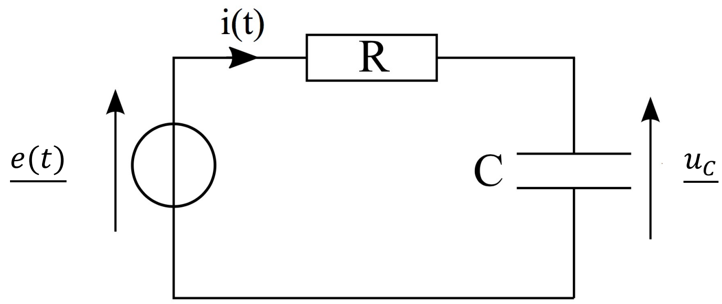
On donne ci-dessous la courbe de l'amplification en fonction de la fréquence pour un système d'ordre 01 et pour un système d'ordre 02.



20. Identifier la courbe $T(f)$ correspondant au système d'ordre 01 et celle correspondant au système d'ordre 2.

❖ **Détermination de l'expression littérale de $\underline{T}(j\omega)$:**

On étudie le système électrique linéaire suivant :



21. Déterminer l'expression littérale de $\underline{T}(j\omega)$ pour ce système, en fonction des grandeurs caractéristiques du système $R\ et\ C$ et en fonction de la pulsation du signal d'entrée, ω.

Le signal de sortie est la tension aux bornes
On rappelle que les grandeurs $R\ et\ C$ ne sont pas

On cherche à déterminer sa fonction de transfert ou transmittance isochrone complexe $\underline{T}(j\omega)$.

1ème étape : écrire la définition de la transmittance isochrone (ou fonction de transfert) complexe et remplacer les signaux de sortie et d'entrée par les notations utilisées dans l'exercice

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

Pour le système (R, C) étudié, la transmittance complexe est :

2ème étape : à l'aide de la formule pour le pont diviseur de tension, établir un lien mathématique entre le signal d'entrée et de sortie

3ème étape : dans la fraction obtenue, faire apparaitre au dénominateur des termes adimensionnés.

4ème étape : exprimer le rapport $\frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ grâce à la relation obtenue à la fin de l'étape 3.

5ème étape : en déduire l'expression de la transmittance complexe $\underline{T}(j\omega)$

22. Déterminer l'ordre du système étudié, en justifiant votre réponse.

23. A l'aide des formes canoniques fournies, déterminer la nature du filtrage réalisé par le système étudié.

24. Par identification, déterminer l'expression littérale de la pulsation de coupure ω_C ainsi que la valeur de l'amplification statique T_0.

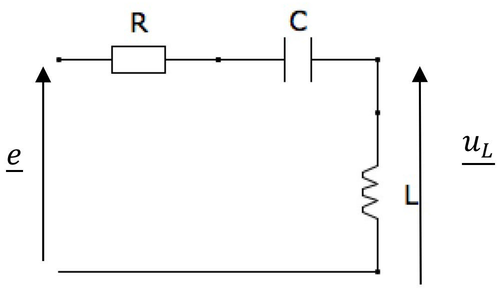
On en conclut que, pour le système (R, C) :
- La pulsation de coupure ω_C a pour expression $\omega_C = \frac{1}{RC}$.
- L'amplification statique T_0 a pour valeur 1.

Conclusion sur le système R, C :

Le système (R, C) est donc un passe-bas d'ordre 1, ne modifiant pas l'amplitude des raies dans sa bande passante (car $T_0 = 1$) et de pulsation de coupure $\omega_C = \frac{1}{RC}$. Sa bande passante est donc $[0; \omega_C]$

Grâce à la transmittance isochrone du système, on détermine sans ambiguïté et rapidement le comportement et les grandeurs caractéristiques de ce système.

25. Déterminer la fonction de transfert ou transmittance isochrone $\underline{T}(j\omega)$ du système suivant, le signal de sortie étant la tension aux bornes de la bobine idéale :



26. Déterminer l'ordre du système précédent, en justifiant votre réponse :

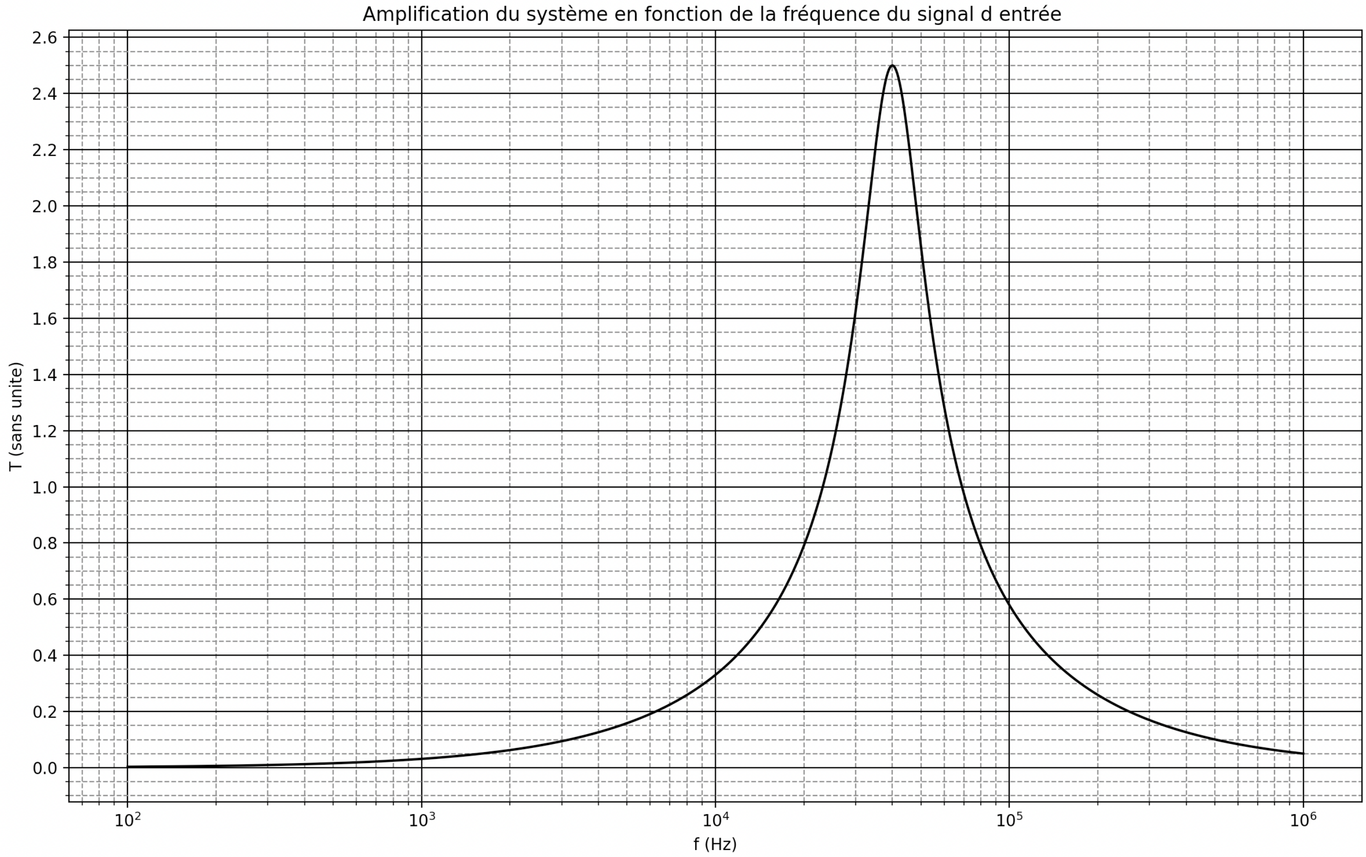
27. Choisir et écrire la forme canonique correspondant à la transmittance isochrone complexe de ce système. En déduire la nature du filtrage réalisé par ce système.

28. A l'aide d'une identification, déterminer l'expression littérale du facteur de qualité Q et de la pulsation propre ω_0 en fonction de $R,\ L\ et\ C$ ainsi que la valeur de l'amplification à hautes fréquences T_0 :

Transmittance isochrone complexe démontrée	$\underline{T}(j\omega) = \dfrac{-LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$
Forme canonique	$\underline{T}(j\omega) = \dfrac{-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}T_0}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}$

❖ Passe bande d'ordre 02 :

On étudie un système dont la courbe de l'amplification en fonction de la fréquence du signal d'entrée $T(f)$ est donnée ci-dessous.



29. Calculer la valeur du facteur de qualité Q de ce système :