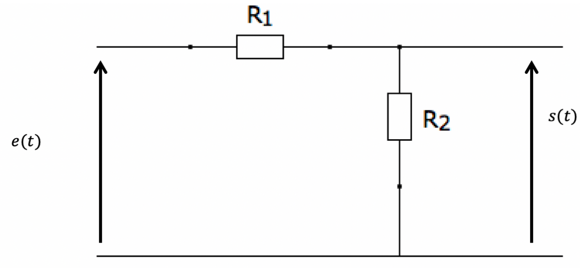
Chapitre 08 - Transmittance isochrone (ou fonction de transfert) d'un système linéaire

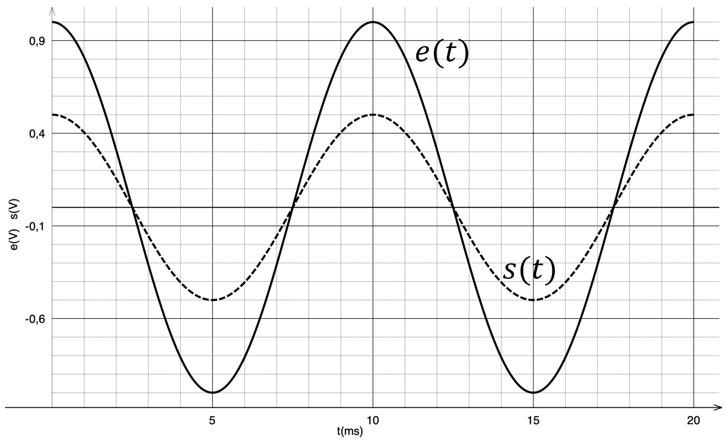
Activités et applications

❖ Étude d'un circuit en série contenant deux conducteurs ohmiques :



On réalise le circuit suivant dont le signal d'entrée est sinusoïdal alternatif de fréquence $f = 100\,Hz$, et d'amplitude $E = 1{,}0\,V$. On prend $R_1 = 1{,}00\,k\Omega$ et $R_2 = 1{,}00\,k\Omega$.

La voie 1 de l'oscilloscope permet de visualiser le signal d'entrée $e(t)$. La voie 2 de l'oscilloscope permet de visualiser le signal de sortie $s(t)$.



On obtient les représentations temporelles des signaux ci-contre.

1. Déterminer les expressions numériques temporelles complexes des signaux $\underline{e(t)}$ et $\underline{s(t)}$:

$$\underline{e(t)} = 1{,}0 \times e^{j200\pi t}$$
$$\underline{s(t)} = 0{,}50 \times e^{j200\pi t}$$

2. Déterminer la valeur de la transmittance isochrone complexe $\underline{T}(j200\pi)$ de ce système, pour une fréquence du signal d'entrée $f = 100\,Hz$:

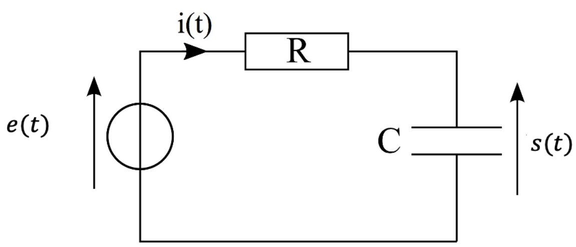
$$\underline{T}(j200\pi) = \frac{\underline{s(t)}}{\underline{e(t)}} = \frac{0{,}50 \times e^{j200\pi t}}{1{,}0 \times e^{j200\pi t}} \ donc\ \underline{T}(j200\pi) = 0{,}500$$

3. Augmenter la fréquence du signal d'entrée jusqu'à $f = 10\,kHz$: la valeur de la transmittance isochrone complexe $\underline{T}(j\omega)$ dépend-elle de la fréquence/ de la pulsation du signal d'entrée ? Étudie-t-on un filtre ici ?

$$\forall f, \qquad \underline{T}(j\omega) = 0{,}500$$

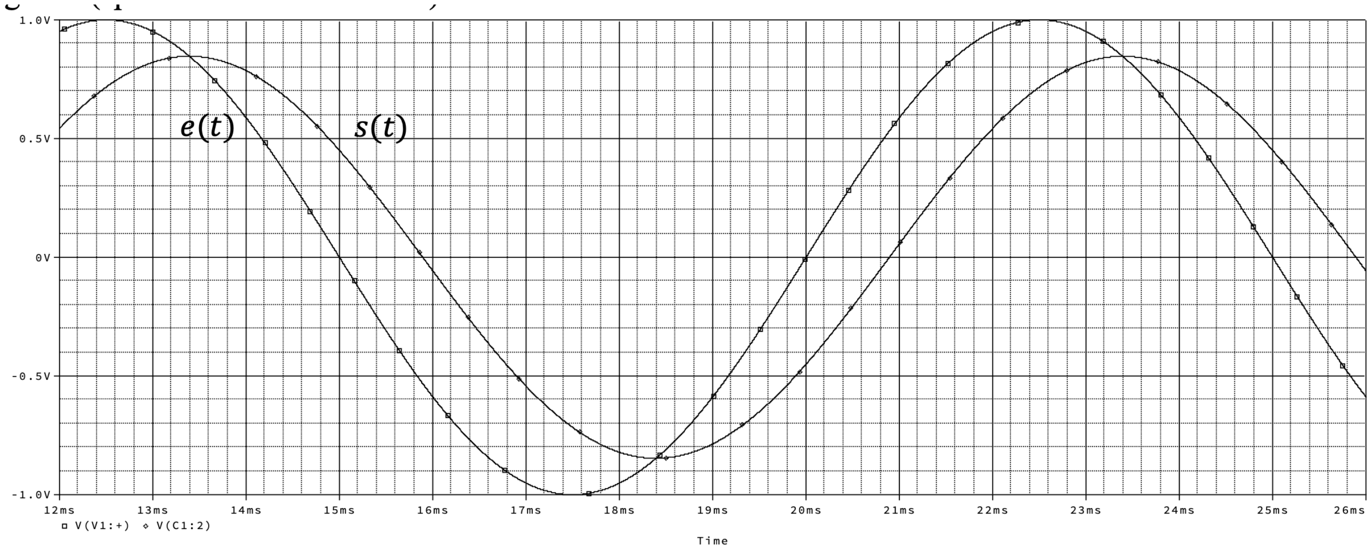
Toutes les fréquences sont atténuées : ce système n'est donc pas un filtre. C'est un pont-diviseur de tension.

❖ Étude du système $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$:



On place dans un circuit en série un GBF qui impose un signal d'entrée sinusoïdal alternatif de fréquence $f = 100\,Hz$, et d'amplitude $E = 1{,}0\,V$. Le condensateur a une capacité $C = 1\,\mu F$ et le conducteur ohmique a une résistance $R = 1\,k\Omega$.

Une fois le régime transitoire terminé, on obtient expérimentalement les représentations temporelles des signaux (après une durée de 10 ms) :



4. Le signal de sortie possède-t-il alors le même type de motif que le signal d'entrée ? Comment appelle-t-on le régime observé ?

Le signal de sortie possède le même motif que le signal d'entrée : c'est le régime sinusoïdal forcé.

5. Déterminer l'amplitude U_m et la phase à l'origine φ du signal de sortie

$$U_m = 0{,}84\,V$$

Graphiquement, on observe que le signal u_C est en retard par rapport au signal d'entrée e(t) : le signal de sortie atteint 0V, 0,9 ms après la tension d'entrée. On note cette durée $\Delta t = -0{,}9\,ms = -0{,}9 \times 10^{-3} s$.

$$\varphi = \Delta t \times \frac{2\pi}{T} = -0{,}9 \times 10^{-3} \times \frac{2\pi}{10 \times 10^{-3}} = -0{,}57\,rad$$

6. Déterminer les expressions numériques temporelles complexes des signaux $\underline{e(t)}$ et $\underline{s(t)}$:

$$\underline{e(t)} = 1{,}0 \times e^{j200\pi t}$$

$$\underline{s(t)} = 0{,}84 \times e^{j(200\pi t - 0{,}57)}$$

7. Déterminer la valeur de la transmittance isochrone complexe $\underline{T}(j200\pi)$ de ce système, pour une fréquence du signal d'entrée $f = 100\,Hz$:

$$\underline{T}(j200\pi) = \frac{\underline{s(t)}}{\underline{e(t)}} = \frac{0{,}84 \times e^{j(200\pi t - 0{,}57)}}{1{,}0 \times e^{j200\pi t}} = \frac{0{,}84 \times e^{j(200\pi t)} \times e^{-j0{,}57}}{1{,}0 \times e^{j200\pi t}} = \frac{0{,}84 \times e^{-j0{,}57}}{1{,}0} = 0{,}84 \times e^{-j0{,}57}$$

8. A quelle grandeur physique correspond l'argument de $\underline{T}(j200\pi)$? A quelle grandeur physique correspond le module $\underline{T}(j200\pi)$?

$$\underline{T}(j200\pi) = \boxed{0{,}84} \times e^{\boxed{-j0{,}57}}$$
$$\underline{T}(j200\pi) = \boxed{|\underline{T}(j200\pi)|} \times e^{\boxed{j\alpha}}$$

Par identification :

$$|\underline{T}(j200\pi)| = 0{,}84 = \frac{U_m}{E}$$
$$\alpha = -0{,}57 = \varphi$$

9. Augmenter la fréquence du signal d'entrée jusqu'à $f = 10\ kHz$: la valeur de la transmittance isochrone dépend-elle de la fréquence/ de la pulsation du signal d'entrée ? Étudie-t-on un filtre ici ?

Le déphasage du signal de sortie par rapport au signal d'entrée dépend de la fréquence f du signal d'entrée. L'amplitude U_m du signal de sortie dépend aussi de la fréquence du signal d'entrée.

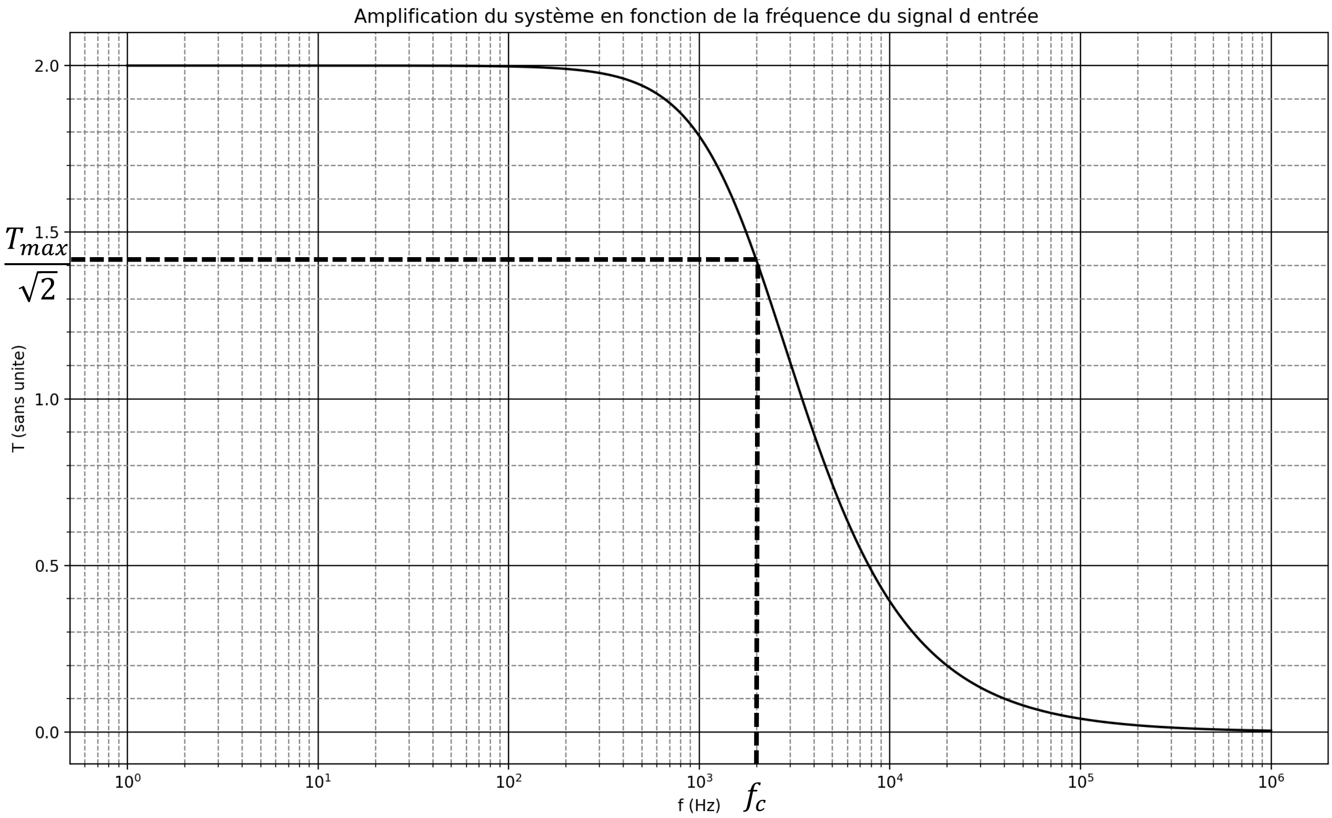
La valeur de la transmittance isochrone dépend donc la fréquence/ de la pulsation du signal d'entrée :
$$\lim_{f\to+\infty} T(f) = 0\ et\ \lim_{f\to 0} T(f) = 1$$
Les hautes fréquences sont atténuées et les basses fréquences passent : ce système est donc un filtre passe-bas.

10. Si l'on souhaite connaitre la forme trigonométrique de $\underline{T}(j\omega)$ pour chaque pulsation possible du signal d'entrée, combien de représentations temporelles de $e(t)\ et\ s(t)$ nous faudrait-il ?

Une infinité ! La méthode graphique permet de comprendre ce qu'est $\underline{T}(j\omega)$ mais ne permet de connaitre parfaitement la réponse du système pour chaque pulsation du signal d'entrée.

❖ Exploitation graphique de $T(f)$: première partie

On étudie un système A dans la courbe de l'amplification en fonction de la fréquence est donnée ci-dessous :



11. Déterminer la nature du filtrage réalisé par ce système A .

$$\lim_{f \to 0} T(f) \ = 2$$

Le système est donc amplificateur à basses fréquences/pulsations.

$$\lim_{f \to +\infty} T(f) \ = 0$$

Le système est donc atténuateur à hautes fréquences/pulsations.
Le système est donc un filtre passe-bas.

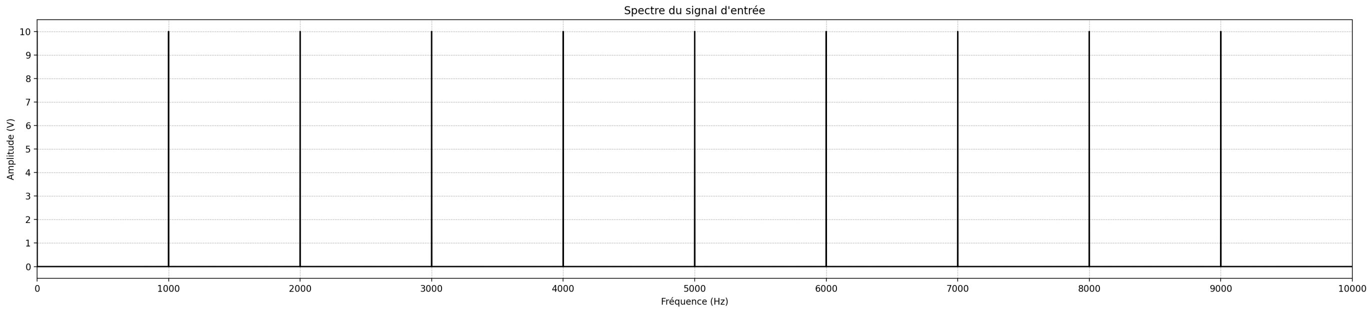
12. Déterminer graphiquement la valeur de $|T_0|$ et indiquer le nom de T_0 :
T_0 : amplification statique

$$\lim_{f \to 0} T(f) = 2 \quad donc \quad |T_0| = 2$$

Le système amplifie les amplitudes des harmoniques dont les pulsations sont dans la bande passante.

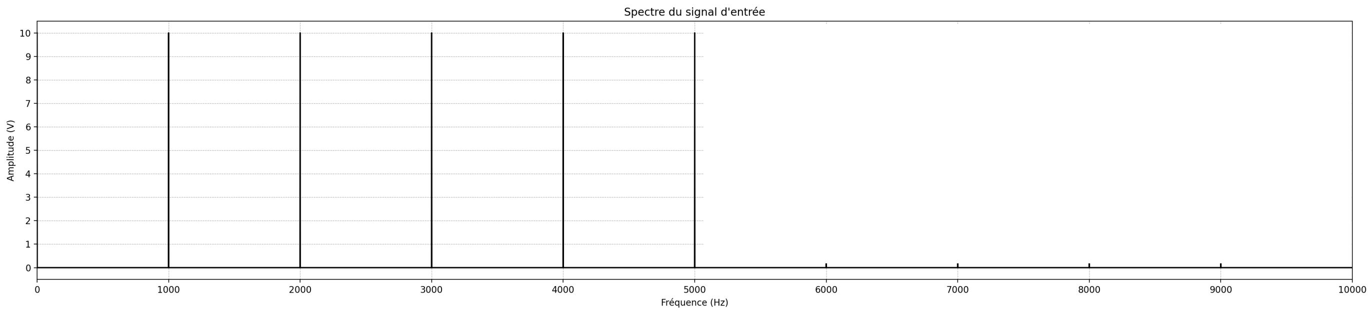
❖ **Qu'est-ce que la fréquence de coupure à $-3\ dB$ d'un système filtrant réel ?**

On étudie le signal dont la représentation fréquentielle est donnée ci-dessous.



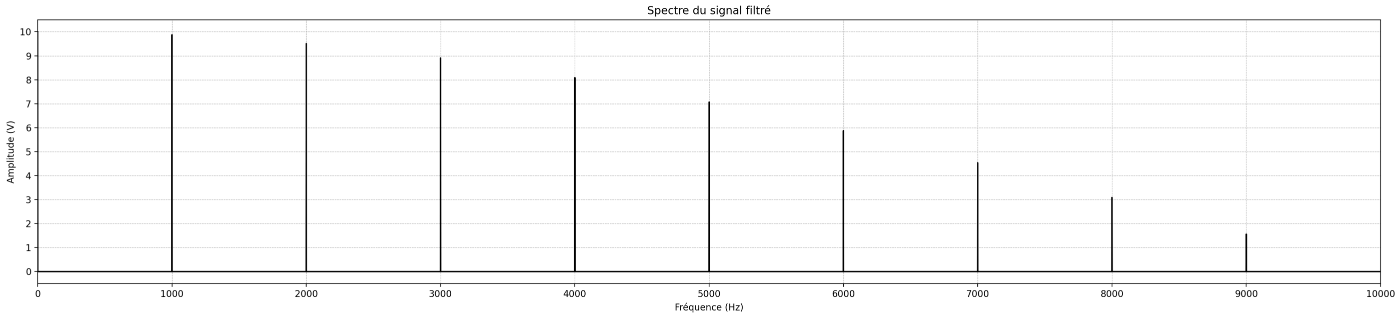
Il est placé à l'entrée d'un système passe-bas idéal dont l'amplification statique T_0 est égale à 1,0 et dont la fréquence de coupure est $f_C = 5000\ Hz$.

13. Tracer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre :



Pour le prof : ouvrir la simulation C08_activite_frequence_ordre.py (fc=5000 Hz et ordre 01) et lancer son exécution

L'enseignant exécute un script Python permettant d'obtenir le spectre du signal en sortie d'un filtre passe-bas réel (ordre 01) dont l'amplification statique T_0 est égale à 1,0 et dont la fréquence de coupure est $f_C = 5000\ Hz$.



14. Observe-t-on une coupure « nette » des harmoniques de rang supérieur à 6 ? L'amplitude de l'harmonique de rang 5 a-t-elle été modifiée par le filtre ?

Il n'y a pas de coupure nette ce filtre réel et l'harmonique de rang 5 a été atténué. Plus le rang de l'harmonique augmente, plus son amplitude est faible.

15. A l'aide des curseurs, relever les amplitudes $A_{5,S}$ et $A_{5,E}$ puis calculer le rapport $\frac{A_{5,S}}{A_{5,E}}$

$$\frac{A_{5,S}}{A_{5,E}} = \frac{7{,}07}{10} = 0{,}707$$

16. Comparer cette valeur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et conclure :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \; donc \; \frac{A_{5,S}}{A_{5,E}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\; ou \; encore \; A_{5,S} = \frac{A_{5,E}}{\sqrt{2}}$$

Pour un système passe-bas réel dont l'amplification statique T_0 est égale à 1,0 , l'amplitude du signal sinusoïdal alternatif est divisé par $\sqrt{2}$ à la sortie, lorsque sa fréquence correspond à la fréquence de coupure du système.

17. Déterminer graphiquement la fréquence de coupure à $-3dB$ du système A précédent :

On lit $T_{max} = 2$ puis on calcule $\frac{T_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = 1{,}414$.
On cherche l'antécédent de $1{,}414$: on lit $f_C = 2000\ Hz$

18. En déduire la bande passante du système et la largeur de la bande passante de système :

$$[0\ Hz\ ; 2000\ Hz]$$
$$\Delta f = f_C - 0 = 2000 - 0 = 2000\ Hz$$

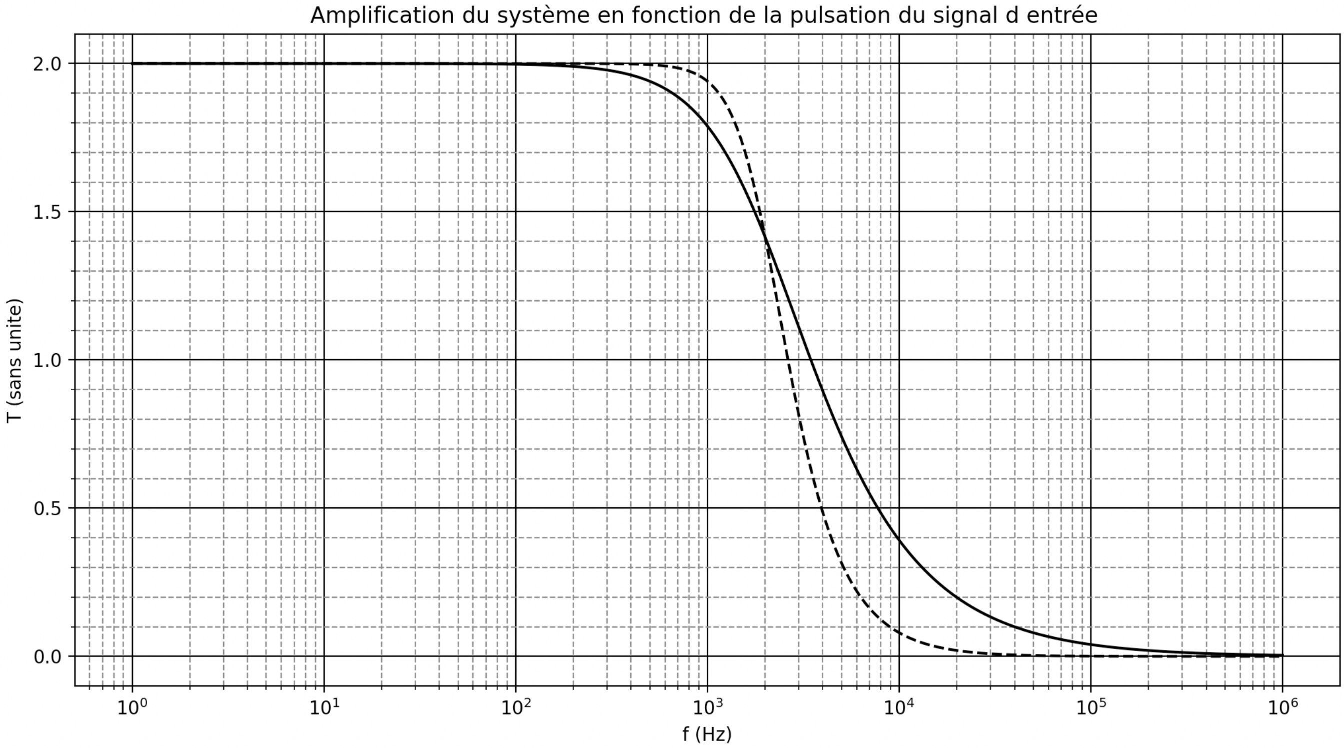
❖ **Qu'est-ce que l'ordre d'un système filtrant réel ?**

Dans la précédente simulation, l'enseignant augmente l'ordre du système passe-bas réel sans modifier la fréquence de coupure $f_C = 5000\ Hz$.

19. Comment évolue l'atténuation des hautes fréquences lorsque l'ordre d'un filtre passe-bas augmente ?

Lorsque l'ordre d'un système passe-bas augmente, l'atténuation des hautes fréquences augmente.

On donne ci-dessous la courbe de l'amplification en fonction de la fréquence pour un système d'ordre 01 et pour un système d'ordre 02.

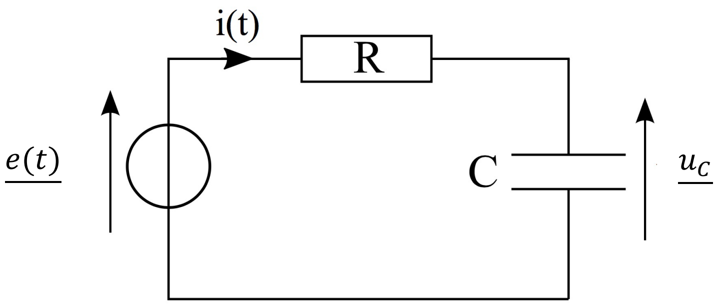


20. Identifier la courbe $T(f)$ correspondant au système d'ordre 01 et celle correspondant au système d'ordre 2.

La courbe $T(f)$ du système d'ordre 01 est celle en trait plein.
La courbe $T(f)$ du système d'ordre 02 est celle en trait pointillé.

❖ **Détermination de l'expression littérale de $\underline{T}(j\omega)$:**

On étudie le système électrique linéaire suivant :



21. Déterminer l'expression littérale de $\underline{T}(j\omega)$ pour ce système, en fonction des grandeurs caractéristiques du système R et C et en fonction de la pulsation du signal d'entrée, ω.

Le signal de sortie est la tension aux bornes du condensateur, $\underline{u_C}$. On rappelle que les grandeurs R et C ne sont pas des inconnues.

On cherche à déterminer sa fonction de transfert ou transmittance isochrone complexe $\underline{T}(j\omega)$.

1ème étape : écrire la définition de la transmittance isochrone (ou fonction de transfert) complexe et remplacer les signaux de sortie et d'entrée par les notations utilisées dans l'exercice

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

Pour le système (R, C) étudié, la transmittance complexe est :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{u_C}}{\underline{e}}$$

2ème étape : à l'aide de la formule pour le pont diviseur de tension, établir un lien mathématique entre le signal d'entrée et de sortie

$$\underline{u_C} = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_C}} \times \underline{e} \quad (1)$$

Avec

$$\underline{Z_R} + \underline{Z_C} = R + \frac{1}{jC\omega}$$

(1) devient alors :

$$\underline{u_C} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} \times \underline{e}$$

3ème étape : dans la fraction obtenue, faire apparaitre au dénominateur des termes adimensionnés.

On multiplie par $jC\omega$ en haut et en bas :

$$\underline{u_C} = \frac{1}{RjC\omega + 1} \times \underline{e}$$

On trie partie réelle et imaginaire :

$$\underline{u_C} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \times \underline{e}$$

4ème étape : exprimer le rapport $\frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ grâce à la relation obtenue à la fin de l'étape 3.

$$\frac{\underline{u_C}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

5ème étape : en déduire l'expression de la transmittance complexe $\underline{T}(j\omega)$

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{u_C}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

22. Déterminer l'ordre du système étudié, en justifiant votre réponse.

$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega}$ a comme terme de plus haut degré, un terme en $\omega = \omega^1$. Il s'agit donc d'un système d'ordre 1.

23. A l'aide des formes canoniques fournies, déterminer la nature du filtrage réalisé par le système étudié.

A l'aide des formes canoniques situées fournies, on en déduit que le système est donc un passe-bas d'ordre 1.

24. Par identification, déterminer l'expression littérale de la pulsation de coupure ω_C ainsi que la valeur de l'amplification statique T_0.

On identifie cette transmittance isochrone complexe à sa forme canonique :

Transmittance isochrone complexe démontrée	$\frac{1}{1+jRC\omega}$
Forme canonique	$\frac{T_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_C}}$

Par identification, on obtient donc un système de 2 équations à 2 inconnues (ω_C et T_0) :

$$j\frac{\omega}{\omega_C} = jRC\omega \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\omega_C} = RC \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\omega_C = \frac{1}{RC}}$$

$$\boldsymbol{T_0 = 1}$$

On en conclut que, pour le système (R, C) :

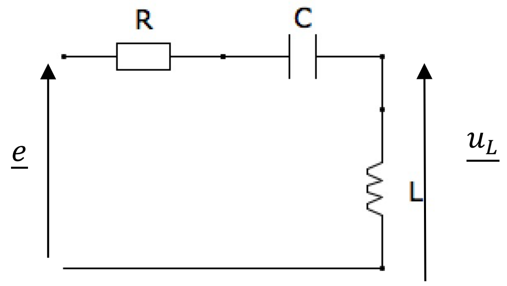
- La pulsation de coupure ω_C a pour expression $\omega_C = \frac{1}{RC}$.
- L'amplification statique T_0 a pour valeur 1.

Conclusion sur le système R, C :

Le système (R, C) est donc un passe-bas d'ordre 1, ne modifiant pas l'amplitude des raies dans sa bande passante (car $T_0 = 1$) et de pulsation de coupure $\omega_C = \frac{1}{RC}$. Sa bande passante est donc $[0; \omega_C]$

Grâce à la transmittance isochrone du système, on détermine sans ambiguïté et rapidement le comportement et les grandeurs caractéristiques de ce système.

25. Déterminer la fonction de transfert ou transmittance isochrone $\underline{T}(j\omega)$ du système suivant, le signal de sortie étant la tension aux bornes de la bobine idéale :



$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{u_L}}{\underline{e}}$$

Or :

$$\underline{u_L} = \frac{\underline{Z_L}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_C} + \underline{Z_L}} \times \underline{e} = \frac{jL\omega}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} \times \underline{e}$$

On multiplie par $jC\omega$ en haut et en bas :

$$\underline{u_L} = \frac{-LC\omega^2}{jRC\omega + 1 - LC\omega^2} \times \underline{e}$$

Donc :

$$\frac{\underline{u_L}}{\underline{e}} = \frac{-LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Il vient finalement :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{-LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

26. Déterminer l'ordre du système précédent, en justifiant votre réponse :

Pour ce système, $\underline{T}(j\omega)$ a comme terme de plus haut degré, un terme en ω^2. Il s'agit donc d'un système d'ordre 2.

27. Choisir et écrire la forme canonique correspondant à la transmittance isochrone complexe de ce système. En déduire la nature du filtrage réalisé par ce système.

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} T_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

Il s'agit donc d'un passe-haut d'ordre 2.

28. A l'aide d'une identification, déterminer l'expression littérale du facteur de qualité Q et de la pulsation propre ω_0 en fonction de $R,\ L\ et\ C$ ainsi que la valeur de l'amplification à hautes fréquences T_0 :

Transmittance isochrone complexe démontrée	$\underline{T}(j\omega) = \dfrac{-LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$
Forme canonique	$\underline{T}(j\omega) = \dfrac{-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}T_0}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}$

Par identification, on obtient donc un système de 3 équations à 3 inconnues (ω_0 , $Q\ et\ T_0$) :

$$-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = -LC\omega^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\omega_0^2} = LC \quad \Leftrightarrow \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

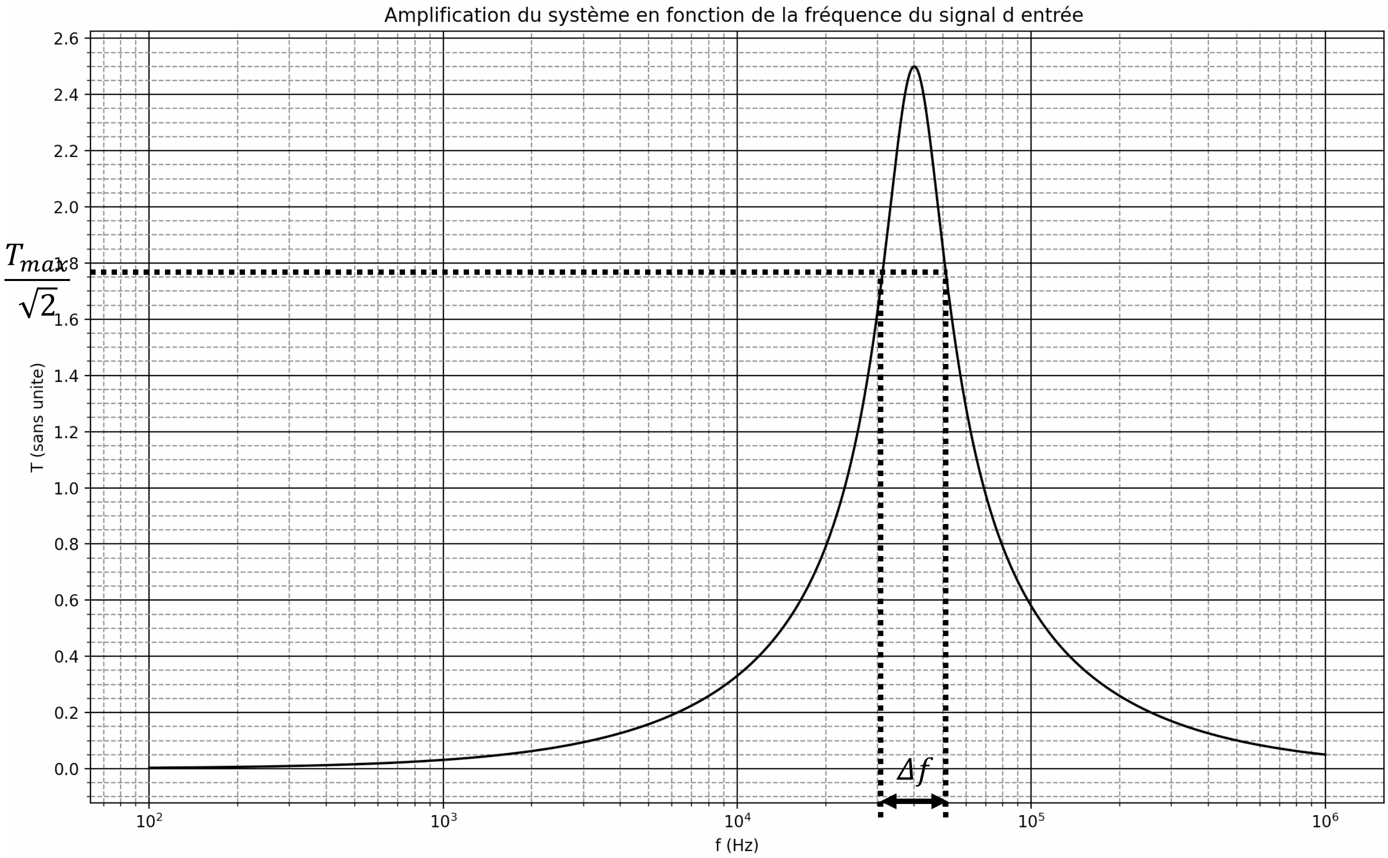
$$-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \times T_0 = -LC\omega^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\omega_0^2} \times T_0 = LC \quad \Leftrightarrow \quad LC \times T_0 = LC \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{T_0 = 1}$$

$$j\frac{\omega}{Q\omega_0} = jRC\omega \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{Q\omega_0} = RC \quad \Leftrightarrow \quad Q = \frac{1}{RC\omega_0} \quad \Leftrightarrow \quad Q = \frac{1}{RC\frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad Q = \frac{\sqrt{LC}}{RC} = \boldsymbol{\frac{1}{R}} \times \sqrt{\boldsymbol{\frac{L}{C}}}$$

❖ Passe bande d'ordre 02 :

On étudie un système dont la courbe de l'amplification en fonction de la fréquence du signal d'entrée $T(f)$ est donnée ci-dessous.



29. Calculer la valeur du facteur de qualité Q de ce système :

On lit $f_0 = 40\ 000\ Hz$

On lit $T_{max} = 2.5$ puis on calcule $\frac{T_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{2.5}{\sqrt{2}} = 1{,}77$.

On cherche les antécédents de 1,77 : on lit $f_{C,min} \approx 30\ 000\ Hz$ et $f_{C,max} \approx 50\ 000\ Hz$

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} \approx \frac{40\ 000}{20\ 000} \approx 2$$