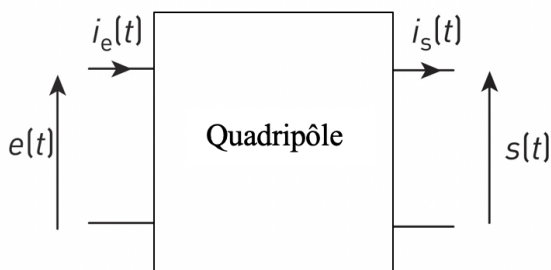


Chapitre 08

Transmittance isochrone (ou fonction de transfert) d'un système linéaire

Capacités exigibles :

- Savoir identifier la nature d'un filtre à partir de sa courbe d'amplification en fonction de la fréquence (ou la fréquence réduite : $\frac{f}{f_c}$) pour un filtre analogique
- Savoir déterminer la (ou les) fréquence(s) de coupure à partir de la courbe d'amplification
- Savoir déterminer, à partir d'un schéma électrique, l'expression de la transmittance isochrone dans le cas d'un filtre du premier ordre et l'écrire sous sa forme canonique pour déterminer ses caractéristiques
- Savoir identifier la nature d'un filtre et son ordre à partir de sa fonction de transfert (passe haut, passe-bas, passe bande)
- Savoir choisir la nature d'un filtre à partir du rôle qui lui est donné par un cahier des charges (passe haut, passe-bas, passe bande)



Dans les différents domaines des Sciences Physiques (électrique, mécanique, thermodynamique), les systèmes étudiés peuvent être modélisés comme des modèles linéaires.

❖ Principe général de la réponse fréquentielle d'un système linéaire :

Le signal d'entrée est un signal sinusoïdal alternatif (son spectre contient une seule raie, son fondamental) dont nous connaissons toutes les grandeurs caractéristiques :

$$e(t) = E \times \cos(2\pi f \times t) = E \times \cos(\omega \times t)$$

E : amplitude du signal d'entrée (en volt, si le système étudié est un système électrique)

f : fréquence du signal d'entrée, en Hz .

$\omega = 2\pi f$: pulsation du signal d'entrée, en rad/s

Sa **phase à l'origine** $\varphi_{entrée}$ est choisie **nulle** : le **signal d'entrée** $e(t)$ est donc notre **signal de référence**.

La réponse fréquentielle (réponse du système à un signal sinusoïdal alternatif en entrée) consiste à comparer les grandeurs caractéristiques du signal de sortie à celle du signal d'entrée : forme des motifs, fréquences, amplitudes, déphasage entre les deux signaux.

Les systèmes se comportant comme des filtres, fournissent un signal de sortie dont l'amplitude et le déphasage (pour rapport au signal d'entrée) dépendent de la fréquence du signal d'entrée. On cherche à modéliser dans ce chapitre, ces variations d'amplitude et de déphasage.

Dans la suite du chapitre, notre étude se fait en respectant le cadre de l'ARQS et en régime sinusoïdal forcé.

I. Transmittances isochrones complexes de systèmes linéaires en régime sinusoïdal forcé :

A. Expression littérale complexe des signaux d'entrée et de sortie :

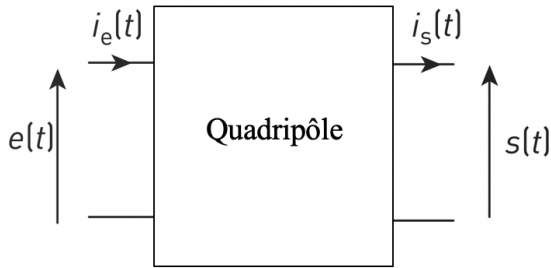
❖ **Signaux sinusoïdaux alternatifs en notation réelle :**

Le signal d'entrée $e(t)$ est périodique sinusoïdal alternatif, de pulsation ω et de phase à l'origine nulle, dont l'expression temporelle est :

$$e(t) = E \times \cos(\omega t)$$

Pour les systèmes étudiés ici, le signal de sortie $s(t)$ est alors périodique sinusoïdal alternatif, dont l'expression temporelle est :

$$s(t) = U_m \times \cos(\omega t + \varphi)$$



- E : amplitude du signal d'entrée, en V
- U_m : amplitude du signal de sortie, en V
- φ : phase à l'origine du signal de sortie, en rad

L'amplitude U_m du signal de sortie est en générale différente de E et le signal de sortie présente un déphasage φ par rapport au signal d'entrée.

Les valeurs de U_m et φ dépendent de la fréquence/de la pulsation du signal d'entrée.

❖ **Signaux sinusoïdaux alternatifs en notation complexe :**

Notation réelle	Notation complexe
$e(t) = E \times \cos(\omega t)$	$\underline{e}(t) = E \times e^{j\omega t}$
$s(t) = U_m \times \cos(\omega t + \varphi)$	$\underline{s}(t) = U_m \times e^{j(\omega t + \varphi)}$

B. Transmittance isochrone complexe d'un système linéaire :



L'ensemble des notions abordées dans la suite de ce paragraphe sont explicitées dans la vidéo suivante :

« Que représente la transmittance isochrone complexe d'un système ? »



❖ **Définition : transmittance isochrone complexe**

On définit la transmittance isochrone complexe (ou fonction de transfert complexe) d'un système, notée $\underline{T}(j\omega)$, grâce à la formule suivante :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}$$

$\underline{e}(t)$: signal d'entrée complexe (dont la partie réelle est égale à e)

$\underline{s}(t)$: signal de sortie complexe (dont la partie réelle est égale à s)

❖ **Forme trigonométrique de la transmittance isochrone complexe :**

$$\underline{T}(j\omega) = |\underline{T}(j\omega)| \times e^{j\alpha}$$

$|\underline{T}(j\omega)|$: module de la transmittance isochrone complexe, sans unité

α : argument de la transmittance isochrone complexe



Pour alléger la notation, on désigne souvent le module de la transmittance isochrone complexe par la lettre $T(\omega)$:

$$|\underline{T}(j\omega)| = T(\omega)$$

La grandeur $T(\omega)$ est nommée « amplification » du système.

❖ **Intérêt de la transmittance isochrone complexe :**

Si l'on connaît l'expression théorique de $\underline{T}(j\omega)$, on connaît alors l'expression de son module et de son argument, en fonction de la pulsation ω du signal d'entrée.

- On peut étudier l'évolution de l'amplification $T(\omega)$ en fonction de ω : on pourra donc prévoir l'évolution du rapport des amplitudes des deux signaux $\frac{U_m}{E}$ en fonction de ω (et donc de la fréquence du signal d'entrée).
- On peut étudier l'évolution de l'argument α en fonction de ω : on pourra donc prévoir l'évolution du déphasage du signal de sortie par rapport au signal d'entrée en fonction de ω (et donc de la fréquence du signal d'entrée).

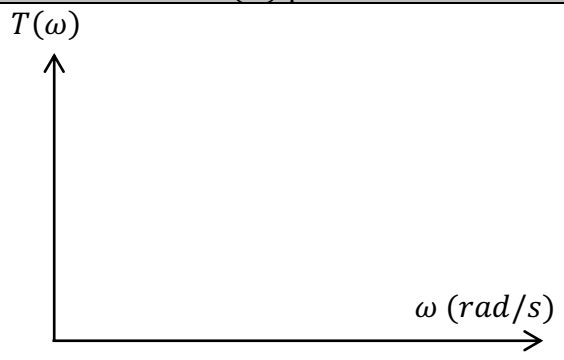
A l'aide d'un logiciel de simulation, on peut même tracer théoriquement $T(\omega)$ et $\varphi(\omega)$, en utilisant une échelle logarithmique pour la pulsation du signal d'entrée (en abscisse).

II. Allure de la courbe d'amplification $T(\omega)$ pour les filtres idéaux :

A. Filtrage idéal passe-bas :

Un système passe-bas, **idéal** ayant comme amplification statique $|T_0| = 1$, laisse passer les signaux sinusoïdaux alternatifs « de basses fréquences/pulsations » (ceux dont la pulsation est inférieure à la pulsation de coupure ω_c du système) : pour chacune de ces pulsations, $U_m = E$ donc $T(\omega) = \frac{U_m}{E} = 1$


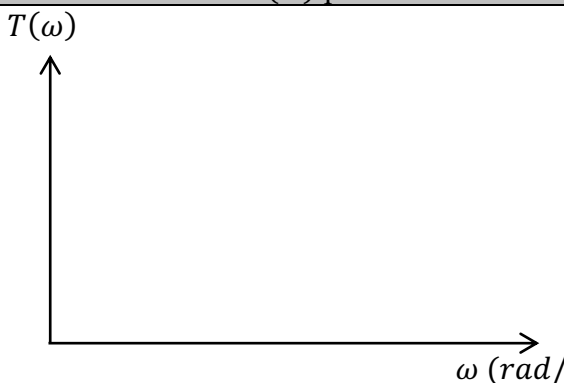
Un système passe-bas, **idéal** ayant comme amplification statique $|T_0| = 1$, coupe parfaitement les signaux sinusoïdaux alternatifs « de hautes fréquences/pulsations » (ceux dont la pulsation est supérieure à la pulsation de coupure ω_c du système) : pour chacune de ces pulsations, $U_m = 0 V$ donc $T(\omega) = \frac{U_m}{E} = 0$

Représentation symbolique	Allure de $T(\omega)$ pour le cas idéal	
		Le tracé de $T(\omega)$ en fonction de la pulsation du signal d'entrée pour un filtre passe-bas idéal, ayant comme amplification statique $ T_0 = 1$ donne le graphe ci-contre.

B. Filtrage idéal passe-haut :

Un système passe-haut, **idéal** ayant comme amplification à hautes fréquences $|T_0| = 1$, coupe parfaitement les signaux sinusoïdaux alternatifs « de basses fréquences/pulsations » (ceux dont la pulsation est inférieure à la pulsation de coupure ω_c du système) : pour chacune de ces pulsations, $U_m = 0 V$ donc $T(\omega) = \frac{U_m}{E} = 0$

Un système passe-haut, **idéal** ayant comme amplification à hautes fréquences $|T_0| = 1$, laisse passer les signaux sinusoïdaux alternatifs « de hautes fréquences/pulsations » (ceux dont la pulsation est supérieure à la pulsation de coupure ω_c du système) : pour chacune de ces pulsations, $U_m = E$ donc $T(\omega) = \frac{U_m}{E} = 1$

Représentation symbolique	Allure de $T(\omega)$ pour le cas idéal	
		Le tracé de $T(\omega)$ en fonction de la pulsation du signal d'entrée pour un filtre passe-haut idéal, ayant comme amplification à hautes fréquences $ T_0 = 1$ donne le graphe ci-contre.

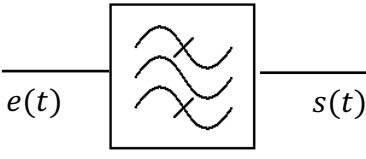
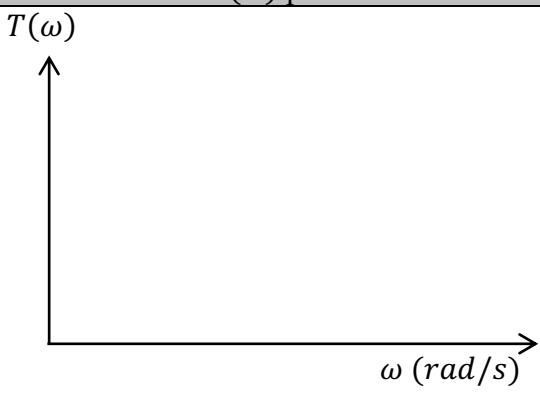
C. Filtrage idéal passe-bande :

Un système passe-bande, **idéal** ayant comme amplification dans la bande passante $|T_0| = 1$, coupe parfaitement :

- les signaux sinusoïdaux alternatifs « de basses fréquences/pulsations » dont la pulsation est inférieure à la pulsation de coupure $\omega_{c,min}$ du système
- les signaux sinusoïdaux alternatifs « de hautes fréquences/pulsations » dont la pulsation est supérieure à la pulsation de coupure $\omega_{c,max}$ du système

Pour chacune de ces pulsations, $U_m = 0$ V donc $T(\omega) = \frac{U_m}{E} = 0$

Un système passe-bande, **idéal** ayant comme amplification dans la bande passante $|T_0| = 1$, laisse passer les signaux sinusoïdaux alternatifs dont la pulsation est comprise dans l'intervalle $[\omega_{c,min}; \omega_{c,max}]$: pour chacune de ces pulsations, $U_m = E$ donc $T(\omega) = \frac{U_m}{E} = 1$

Représentation symbolique	Allure de $T(\omega)$ pour le cas idéal	
		<p>Le tracé de $T(\omega)$ en fonction de la pulsation du signal d'entrée pour un filtre passe-bande idéal, ayant comme amplification dans la bande passante $T_0 = 1$, donne le graphe ci-contre.</p>

III. Exploitation graphique de la courbe d'amplification $T(\omega)$ d'un système filtrant réel :

Ce paragraphe présente toutes les méthodes graphiques permettant de déterminer les grandeurs caractéristiques d'un système filtrant réel.

A. Nature du filtrage réalisé par le système, à partir de $T(\omega)$:

- Déterminer graphiquement la limite de $T(\omega)$ à basses fréquences/pulsations, quand ω tend vers 0 .
si $\lim_{\omega \rightarrow 0} T(\omega) = 1$ alors le système est passeur à basses fréquences/pulsations
si $\lim_{\omega \rightarrow 0} T(\omega) > 1$ alors le système est amplificateur à basses fréquences/pulsations
si $\lim_{\omega \rightarrow 0} T(\omega) < 1$ alors le système est atténuateur à basses fréquences/pulsations

Rédiger si le système est passeur, atténuateur ou amplificateur à basses fréquences/pulsations.

- Déterminer graphiquement la limite de $T(\omega)$ à hautes fréquences/pulsations, quand ω tend vers $+\infty$.
si $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} T(\omega) = 1$ alors le système est passeur à hautes fréquences/pulsations
si $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} T(\omega) > 1$ alors le système est amplificateur à hautes fréquences/pulsations
si $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} T(\omega) < 1$ alors le système est atténuateur à hautes fréquences/pulsations

Rédiger si le système est passeur, atténuateur ou amplificateur à hautes fréquences/pulsations.

- Conclure en indiquant la nature du filtrage réalisé, en choisissant parmi le vocabulaire suivant : passe-bas, passe-haut ou passe-bande.

B. Détermination graphique de la valeur de $|T_0|$:

Il faut au préalable connaître la nature du filtrage réalisé le système.

Sur l'axe des ordonnées du graphe $T(\omega)$, on détermine la valeur de $|T_0|$ (sans unité) ainsi :

- Pour un filtre passe-bas, $|T_0|$ est la valeur de l'amplification T à basses fréquences (quand ω tend vers 0 rad/s)
- Pour un filtre passe-haut, $|T_0|$ est la valeur de l'amplification T à hautes fréquences (quand ω tend vers $+\infty$)
- Pour un filtre passe-bande, $|T_0|$ est la valeur de l'amplification T à la pulsation centrale (nommée aussi pulsation propre ou pulsation de résonance)

C. Détermination graphique de la valeur de la (ou des) pulsation(s) de coupure à -3 dB :

❖ Sens physique de la bande passante à -3 dB : (à retenir)

$\langle P_E \rangle$: puissance active du signal d'entrée

$\langle P_S \rangle$: puissance active du signal de sortie

Pour un système ayant $T_0 = 1$:

❖ Méthode : comment déterminer la (ou les) fréquence(s) de coupure d'un système ?

1^{ère} étape : On détermine graphiquement la valeur maximale de l'amplification du système, noté T_{max}

2^{ème} étape : On calcule la grandeur $\frac{T_{max}}{\sqrt{2}}$

3^{ème} étape : Sur le graphe, on cherche le point (ou les points) de la courbe ayant pour ordonnée $\frac{T_{max}}{\sqrt{2}}$. Son abscisse (ou leur abscisse) a pour valeur ω_c (ou $\omega_{c,min}$ et $\omega_{c,max}$)

D. Comparaison de filtres réels de même nature : ordre d'un système

❖ Qu'est-ce que l'ordre d'un système ?

Les systèmes réels ne réalisent jamais des filtrages « idéaux ». Par exemple, un système « passe-bas » réel ne coupe pas parfaitement les harmoniques ayant une fréquence supérieure à sa fréquence de coupure f_c .

Les systèmes réels se comportant comme des filtres, possèdent un ordre : l'ordre est un nombre entier positif et non nul.

L'ordre d'un système est **propre à chaque système** : il s'agit d'une **grandeur caractéristique** du système étudié.

La valeur de l'ordre d'un système dépend des éléments constituant ce système.

❖ Détermination graphique de l'ordre d'un système :

Un système réalisant un filtrage « idéal/parfait » possède donc un ordre infiniment grand (ce qui est impossible à réaliser).

IV. Détermination et exploitation de la transmittance complexe d'un système électrique, à partir des impédances complexes :

A. Rappels à propos du système « pont diviseur » : **IMPORTANT !**

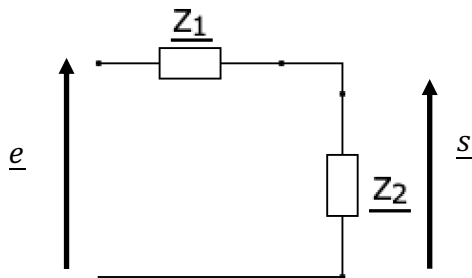


L'ensemble des notions abordées dans cette partie, sont explicitées dans la vidéo suivante :

« Le système pont diviseur de tension en régime sinusoïdal forcé »



Application à un système à deux impédances en série :



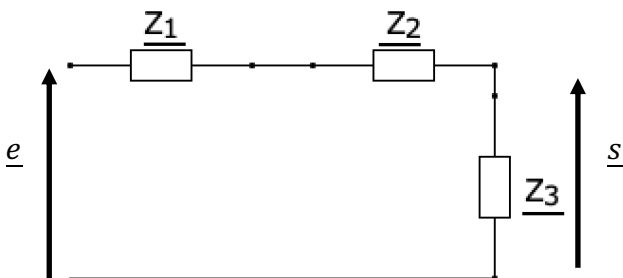
Soit deux impédances complexes \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 placées en série (parcouru par un même courant – schéma ci-contre).

La formule du pont diviseur appliquée au système donne :

\underline{e} : tension aux bornes de l'ensemble des deux impédances

\underline{s} : tension aux bornes de l'impédance \underline{Z}_2

Application à un système à trois impédances en série :



Soit trois impédances complexes placées en série (parcouru par un même courant – schéma ci-contre).

La formule du pont diviseur appliquée au système donne :

\underline{e} : tension aux bornes de l'ensemble des trois impédances

\underline{s} : tension aux bornes de l'impédance \underline{Z}_3

B. Méthode pour déterminer l'expression littérale de $T(j\omega)$:

L'ensemble des notions abordées dans cette partie, sont explicitées dans la vidéo suivante :
 « Comment déterminer la fonction de transfert complexe d'un système ? »



On cherche à déterminer l'expression littérale de $\underline{T}(j\omega) = \frac{s(t)}{e(t)}$, à partir du schéma du système électrique.

❖ **Comment déterminer la transmittance isochrone complexe ? (à savoir-faire)**

1^{ème} étape : écrire la définition de la transmittance isochrone (ou fonction de transfert) complexe et remplacer les signaux de sortie et d'entrée par les notations utilisées dans l'exercice.

2^{ème} étape : à l'aide de la formule pour le pont diviseur de tension, établir un lien mathématique entre le signal d'entrée et de sortie.

3^{ème} étape : dans la fraction obtenue, faire apparaître au dénominateur des termes adimensionnés.

4^{ème} étape : exprimer le rapport $\frac{s}{e}$ grâce à la relation obtenue à la fin de l'étape 3.

5^{ème} étape : en déduire l'expression de la transmittance complexe $\underline{T}(j\omega)$

C. Exploitation de l'expression littérale de $T(j\omega)$ d'un système :❖ **Comment déterminer l'ordre d'un système à partir de $\underline{T}(j\omega)$?**❖ **Comment déterminer la nature du filtrage à partir de la transmittance isochrone complexe ?**

Les formes canoniques situées ci-dessous nous permettent de connaître la nature du filtrage réalisé par le système.

Nature du filtre et ordre	Forme canonique de la transmittance isochrone complexe
Passe-bas d'ordre 1	$\underline{T}(j\omega) = \frac{T_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$ <p>ω_c : pulsation de coupure à $-3dB$, dépendant des paramètres du système (en rad/s).</p> <p>T_0 : amplification statique (sans unité).</p>
Passe-haut d'ordre 1	$\underline{T}(j\omega) = \frac{T_0 \times j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$ <p>ω_c : pulsation de coupure à $-3dB$, dépendant des paramètres du système (en rad/s).</p> <p>T_0 : amplification pour les hautes fréquences (sans unité).</p>

Type de filtre	Forme canonique de la transmittance isochrone complexe
Passe-bas d'ordre 2	$\underline{T}(j\omega) = \frac{T_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$ <p> T_0 : amplification statique, sans unité ω_0 : pulsation propre du système, en <i>rad/s</i> Q : facteur de qualité du système, sans unité. </p>
Passe-haut d'ordre 2	$\underline{T}(j\omega) = \frac{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \times T_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$ <p> T_0 : amplification à hautes fréquences (sans unité) ω_0 : pulsation propre du système, en <i>rad/s</i> Q : facteur de qualité du système, sans unité. </p>
Passe-bande d'ordre 2	$\underline{T}(j\omega) = \frac{j \frac{\omega}{Q\omega_0} \times T_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$ <p> T_0 : amplification dans la bande passante (pour $\omega = \omega_0$) (sans unité) ω_0 : pulsation propre du système, en <i>rad/s</i> Q : facteur de qualité du système, sans unité. </p>

Méthode : (à savoir faire)

1^{ère} étape : Déterminer la transmittance isochrone complexe du système étudié et en déduire l'ordre du système.

2^{ème} étape : Comparer le numérateur de cette transmittance à celui des formes canoniques (qui seront toujours fournies) de même ordre que notre système.

3^{ème} étape : En déduire la nature du filtrage réalisé par le système étudié.

❖ Comment déterminer l'expression littérale des grandeurs canoniques ? à savoir-faire

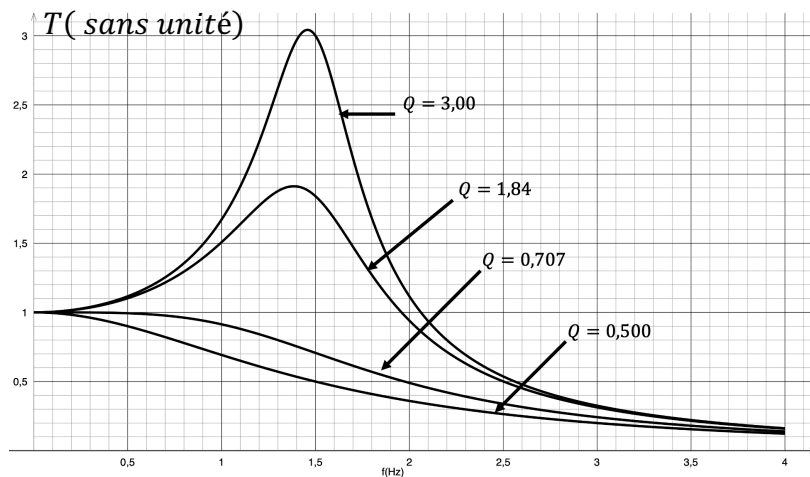
Pour obtenir l'expression littérale des grandeurs canoniques ($T_0 ; \omega_c$) ou ($T_0 ; \omega_0 ; Q$), en fonction des paramètres du système (R, L et C), on procède par **identification entre la transmittance isochrone et sa forme canonique associée**.

V. Influence du facteur de qualité pour des systèmes filtrants d'ordre 02 :

Un système d'ordre 2 possède une grandeur caractéristique nommée facteur de qualité, noté Q (sans unité) dépendant des paramètres du système.

A. Pour les systèmes passe-bas et passe-haut d'ordre 2 : (voir TP 17)

Représentation graphique de $T(f)$ d'un système passe-bas d'ordre 02 pour différentes valeurs de Q :



Nature du filtrage par exploitation graphique :

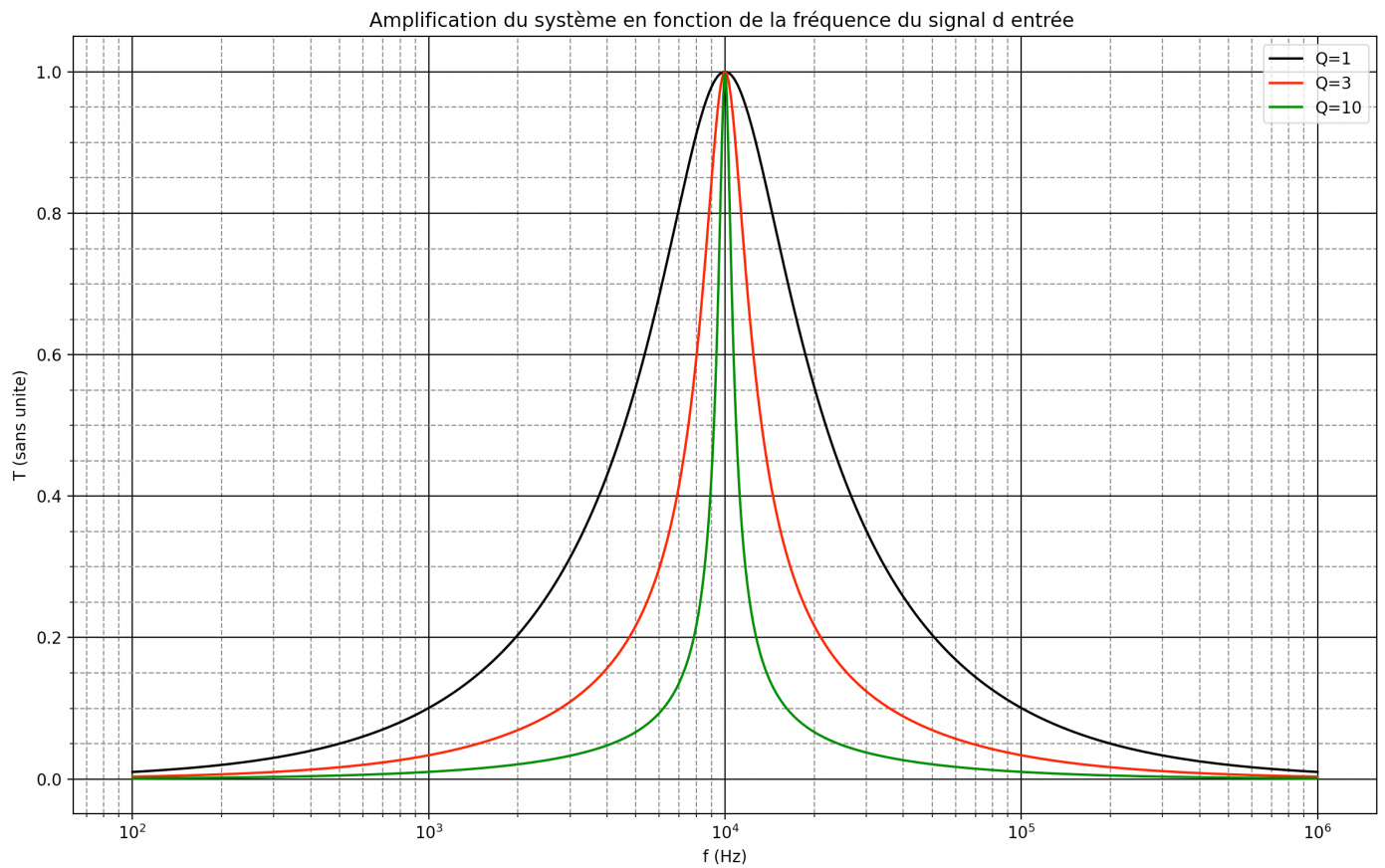
❖ Résonance en amplitude de systèmes passe-bas et passe-haut d'ordre 02 : à retenir

Cas particulier : pour $Q \gg \frac{1}{\sqrt{2}}$

❖ Comment déterminer graphiquement la valeur du facteur de qualité lors d'une résonance en amplitude ?

B. Pour les systèmes passe-bande d'ordre 02 :

On donne ci-dessous les courbes $T(f)$ pour 3 systèmes passe-bande d'ordre 02 ayant 3 facteurs de qualité de valeurs différentes.



❖ **Comment déterminer graphiquement la fréquence propre f_0 du système ?**

f_0 est l'abscisse du sommet de la courbe $T(f)$ pour un passe-bande d'ordre 02.
 f_0 est aussi appelée « fréquence centrale » pour un système passe-bande.

❖ **Comment déterminer graphiquement la valeur du facteur de qualité ?**

Pour un passe-bande d'ordre 2, on a :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} \quad \text{ou encore} \quad Q = \frac{\omega_0}{\Delta \omega}$$

Chapitre 08 - ce qu'il faut savoir :

- Savoir que le signal de sortie présente la même fréquence que le signal d'entrée mais une amplitude et une phase à l'origine différentes (qui dépendent de la fréquence du signal d'entrée)
- Connaître la formule permettant de calculer un déphasage entre deux signaux.
- Connaître la définition de la transmittance isochrone complexe et ce que représentent son module et son argument.
- Connaître l'allure de $T(\omega)$ pour les 3 filtres usuels
- Connaître la représentation symbolique pour les 3 filtres usuels
- Savoir que $\underline{Z}_R = R$; $\underline{Z}_L = jL\omega$; $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$
- Savoir la formule du pont diviseur de tension en complexe.
- Connaître les conditions pour observer la résonance pour un passe-bas ou un passe-haut d'ordre 2
- Connaître la formule permettant de déterminer le facteur de qualité pour un passe-bande d'ordre 2

Chapitre 08 - ce qu'il faut savoir-faire :

- Savoir calculer un déphasage entre deux signaux en veillant à son signe.
- Savoir exploiter la courbe $T(\omega)$ pour déterminer la nature du filtrage, la valeur de $|T_0|$, la fréquence de coupure du système
- Savoir utiliser le pont diviseur de tension en complexe.
- Savoir déterminer la fonction de transfert complexe d'un circuit grâce au pont diviseur de tension.
- Savoir déterminer l'ordre du système à partir de $\underline{T}(j\omega)$
- Savoir choisir la forme canonique de $\underline{T}(j\omega)$ et en déduire la nature du filtre
- Savoir déterminer les expressions des grandeurs canoniques à l'aide d'une identification
- Savoir repérer le phénomène de résonance pour un passe-bas ou un passe-haut d'ordre 02, sur la courbe $T(\omega)$
- Savoir déterminer le facteur de qualité pour un système d'ordre 02 à partir de la courbe $T(\omega)$