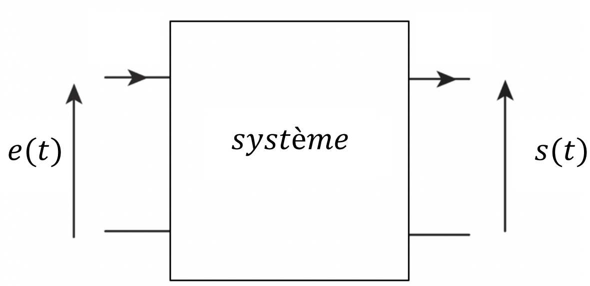
Chapitre 09
Diagramme de Bode d'un système linéaire

Capacités exigibles :

- Savoir identifier la nature d'un filtre à partir de son diagramme de Bode (passe haut, passe-bas, passe bande)
- Savoir élaborer le gabarit d'un filtre à partir d'un cahier des charges : représentation et annotation en vue de l'utilisation d'un logiciel de conception (ER uniquement)
- Vérifier qu'un filtre répond (ou pas) à un cahier des charges en comparant son diagramme de Bode au gabarit imposé (IR uniquement)
- Savoir déterminer le gain (en dB) à une fréquence donnée à partir du diagramme de Bode d'un filtre.
- Connaître et savoir utiliser la relation entre l'amplification en tension et le gain en dB
- Savoir calculer l'amplification à partir du gain (en dB) et réciproquement.
- Savoir déterminer les caractéristiques du signal de sortie d'un filtre à partir de celles du signal d'entrée et du diagramme de Bode du filtre (amplitude et phase)
- Connaître et savoir différencier gain statique, gain à la fréquence propre et gain en hautes fréquences
- Savoir déterminer la (ou les) fréquence(s) de coupure à partir de la courbe de gain
- Savoir tracer le diagramme asymptotique (à partir du diagramme de Bode : gain et phase) et l'exploiter pour déterminer la fréquence propre, la pente des asymptotes (en dB/décade et dB/octave), et l'ordre du filtre
- Connaître l'effet du coefficient d'amortissement (ou du facteur de qualité) sur le diagramme de Bode pour un filtre du second ordre (ER uniquement)
- Déterminer le spectre du signal de sortie d'un filtre à partir de son diagramme de Bode et du spectre du signal périodique d'entrée (ER uniquement)

❖ Rappels des chapitres précédents :



Qu'est-ce qu'un système filtrant ?

Un système linéaire est appelé « filtre » s'il permet de **modifier l'amplitude de certains harmoniques** présents dans le signal d'entrée périodique, **d'une façon différente des autres harmoniques.**
Il peut aussi produire un déphasage du signal de sortie par rapport au signal d'entrée.

Bande passante et largeur de bande passante des systèmes filtrants usuels :

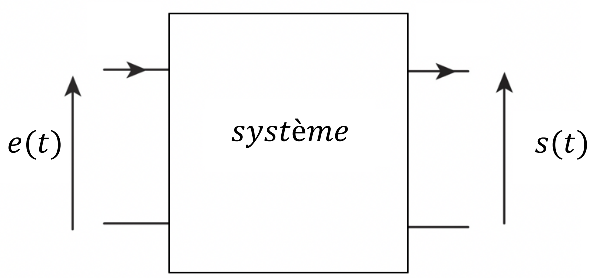
	Filtrage passe-bas	Filtrage passe haut	Filtrage passe bande
Bande passante	$[0\,;f_C]$	$[f_C\,;+\infty[$	$[f_{C,min}\,;f_{C,max}]$
Largeur de la bande passante	$\Delta f = f_C - 0 = f_C$	La largeur de bande passante n'est pas définie.	$\Delta f = f_{C,max} - f_{C,min}$

Signaux d'entrée et de sortie en régime sinusoïdal forcé (RSF) :

	Signal d'entrée	Signal de sortie
Expression réelle	$e(t) = E \times \cos(\omega t)$	$s(t) = U_m \times \cos(\omega t + \varphi)$
Expression complexe	$\underline{e} = E \times e^{j\omega t}$	$\underline{s} = U_m \times e^{j(\omega t + \varphi)}$

E est l'amplitude du signal d'entrée, dont l'unité est le volt.
U_m est l'amplitude du signal de sortie, dont l'unité est le volt.
$\omega = 2\pi f$: pulsation du signal d'entrée, en rad/s (avec f : fréquence du signal d'entrée, en Hz)
φ est le déphasage du signal de sortie par rapport au signal d'entrée, dont l'unité est le radiant.

Transmittance isochrone complexe (ou fonction de transfert) d'un système :



On appelle transmittance isochrone complexe (ou fonction de transfert complexe) d'un système linéaire, le rapport du signal de sortie complexe sur le signal d'entrée complexe (en régime sinusoïdal forcé). On la note $\underline{T}(j\omega)$:

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

Le module de $\underline{T}(j\omega)$ est le rapport de l'amplitude du signal de sortie sur l'amplitude du signal d'entrée, pour la pulsation ω étudiée. Il est noté $|\underline{T}(j\omega)|$ **ou $T(\omega)$ ou T :**

$$T = \frac{U_m}{E}$$

L'argument de la transmittance isochrone complexe $\underline{T}(j\omega)$ est le déphasage φ du signal de sortie par rapport à l'entrée, pour la pulsation ω étudiée.

I. Qu'est-ce le gain en décibel ?

A. Définition du gain en régime sinusoïdal forcé :

Pour la plupart des systèmes filtrants, la valeur de l'amplification $T = \frac{U_m}{E}$ varie de façon très importante, lorsque on fait varier la fréquence f (ou la pulsation ω) du signal d'entrée.

On préfère donc utiliser une grandeur logarithmique (créée à partir de l'amplification T) : le gain en décibel du système, notée G_{dB}.
Dan sles chapitres précédents, le gain en tension était défini par la relation $G_{dB} = 20 \times \log\left(\frac{U_{S,eff}}{U_{E,eff}}\right)$.
En RSF, les deux signaux sont sinusoïdaux alternatifs :

$$G_{dB} = 20 \times \log\left(\frac{U_{S,eff}}{U_{E,eff}}\right) = 20 \times \log\left(\frac{\frac{U_m}{\sqrt{2}}}{\frac{E}{\sqrt{2}}}\right) = 20 \times \log\left(\frac{U_m}{E}\right)$$

❖ **Gain en décibel d'un système en RSF : (à connaître par cœur)**

Le gain en décibel G_{dB} pour un système linéaire en régime sinusoïdal forcé est défini ainsi :

$$G_{dB} = 20 \times \log\left(\frac{U_m}{E}\right)$$

avec G_{dB} : gain en décibels, dont l'unité est notée dB

E : amplitude du signal d'entrée, dont l'unité est le volt.

U_m : amplitude du signal de sortie, dont l'unité est le volt.

A partir de l'amplification du système, le gain en décibel G_{dB} pour un système linéaire en régime sinusoïdal forcé est défini ainsi :

$$G_{dB} = 20 \times \log T$$

avec G_{dB} : gain en décibels, dont l'unité est notée dB

T : amplification (module de la transmittance isochrone) du système, sans unité et égal à $\frac{U_m}{E}$.

B. <u>- 3 dB : une valeur particulière</u>

II. <u>Diagramme de Bode d'un système :</u>

L'ensemble des méthodes graphiques à connaitre sont explicitées dans la vidéo :
« Apprendre à lire le diagramme de Bode d'un système linéaire »

A. <u>Qu'est-ce que le « diagramme de Bode d'un système » ?</u>

Le diagramme de Bode est une représentation graphique qui permet de comprendre le comportement du système étudié, quelle que soit la fréquence du signal d'entrée.

L'axe des abscisses peut être :
- la pulsation ω du signal d'entrée
- la fréquence f du signal d'entrée.

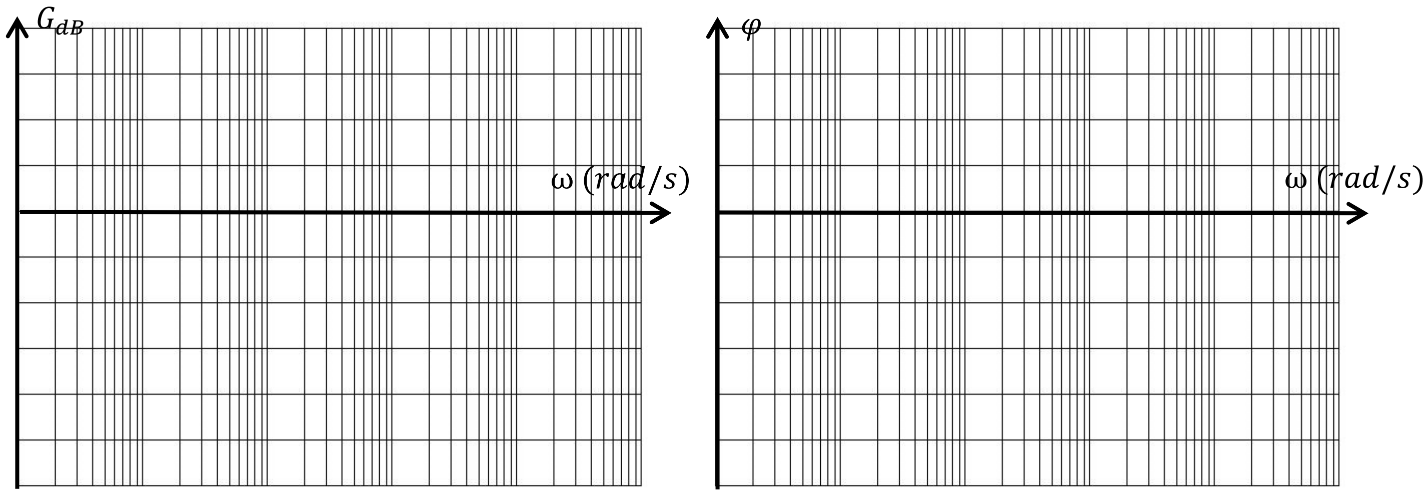
Dans ce chapitre, on choisit la pulsation ω (plutôt que la fréquence) car c'est elle qui apparaît naturellement dans les expressions en complexes.

Comme $\underline{T}(j\omega)$ est un nombre complexe, on choisit de le représenter à l'aide de deux graphes :

- *1er graphe :* le gain en décibels G_{dB} (lié à l'amplification T du système), en fonction de la pulsation ω du signal d'entrée.
- *2ème graphe :* le déphasage φ du signal de sortie par rapport au signal d'entrée (c'est-à-dire l'argument de $\underline{T}(j\omega)$) en fonction de la pulsation ω du signal d'entrée.

Un diagramme de Bode est donc en réalité, l'association de ces deux graphes :

	1er graphe : $G_{dB}(\omega)$	2ème graphe : $\varphi(\omega)$
En ordonnées	G_{dB}	φ
Type d'échelle pour les ordonnées	Échelle linéaire	Échelle linéaire
En abscisses	ω	ω
Type d'échelle pour les abscisses	Échelle logarithmique	Échelle logarithmique



Le déphasage est tel que $-\pi < \varphi \leq \pi$: un axe linéaire est donc suffisant pour cette grandeur.

Remarque importante pour les TP ou les exercices :

L'axe des abscisses peut être un axe représentant la fréquence f du signal d'entrée $(en\ Hz)$.

Toutes les méthodes d'exploitation graphique explicitées dans la suite de ce paragraphe fonctionnent pour un diagramme de Bode ayant pour abscisse $\omega\ ou\ f$: vous pouvez donc « remplacer » dans chaque méthode, la lettre ω par la lettre f (si l'axe des abscisses est en Hz).

B. Exploitation du diagramme de Bode pour le gain en décibel $G_{dB}(\omega)$: nature du filtrage

Si pour une fréquence du signal d'entrée fixée, le gain en décibel est strictement positif $\boldsymbol{G_{dB} > 0}$ alors le système est **amplificateur** à cette fréquence.
Si pour une fréquence du signal d'entrée fixée, le gain en décibel est strictement négatif $\boldsymbol{G_{dB} < 0}$ alors le système est **atténuateur** à cette fréquence.
Si pour une fréquence du signal d'entrée fixée, le gain en décibel est nul $\boldsymbol{G_{dB} = 0\ dB}$ alors le système est **passeur** à cette fréquence.

❖ Comment déterminer la nature du filtrage d'un système ?

Sur le diagramme de Bode en gain, on détermine le signe du gain G_{dB} à basses fréquences : on en déduit si le système est amplificateur, atténuateur ou passeur à basses fréquences.

Sur le diagramme de Bode en gain, on détermine le signe du gain G_{dB} à hautes fréquences : on en déduit si le système est amplificateur, atténuateur ou passeur à hautes fréquences.

Puis on conclut en indiquant la nature du filtrage réalisé par le système, avec l'un des termes suivants : passe-haut, passe-bas ou passe-bande.

C. Exploitation du diagramme de Bode pour le gain en décibel $G_{dB}(\omega)$: bande passante

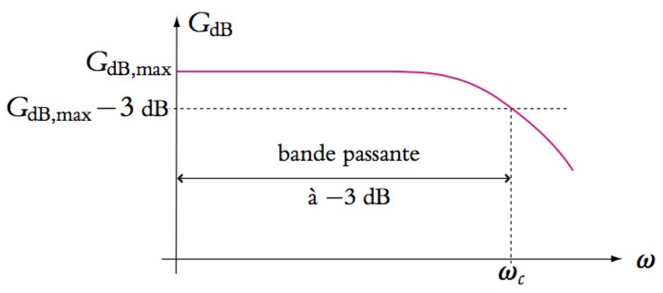
❖ Pulsation de coupure ω_C à -3dB :

Méthode : comment déterminer graphiquement la (ou les) pulsation de coupure(s) d'un système ?

1ère étape : On détermine graphiquement la valeur maximale du gain du système, noté $G_{dB,max}$
2ème étape : On lui soustrait $3\ dB$: on calcule donc $G_{dB,max} - 3dB$
3ème étape : Sur le graphe, on cherche le point (ou les points) de la courbe ayant pour ordonnée $G_{dB,max} - 3dB$. Son abscisse (ou leur abscisse) a pour valeur ω_C (ou $\omega_{c,min}$ et $\omega_{c,max}$)

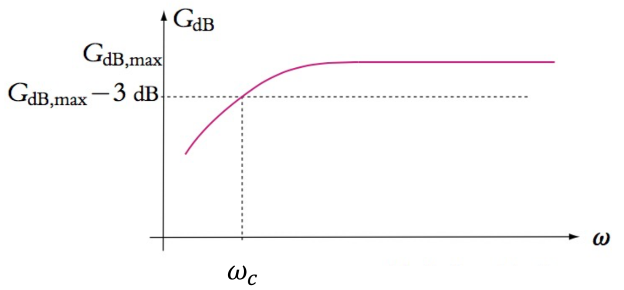
❖ Bande-passante des systèmes passe-haut ou passe-bas :

Les systèmes passe-bas ou passe-haut ne possèdent qu'une seule pulsation de coupure ω_C:



Le gain est supérieur à $G_{dB,max} - 3$ pour les pulsations inférieures à ω_C. La pulsation de coupure ω_C est donc une pulsation de coupure haute. Puisqu'il n'y a pas de pulsation de coupure basse, la bande passante est $[0,\ \omega_C]$ et la largeur de bande passante :

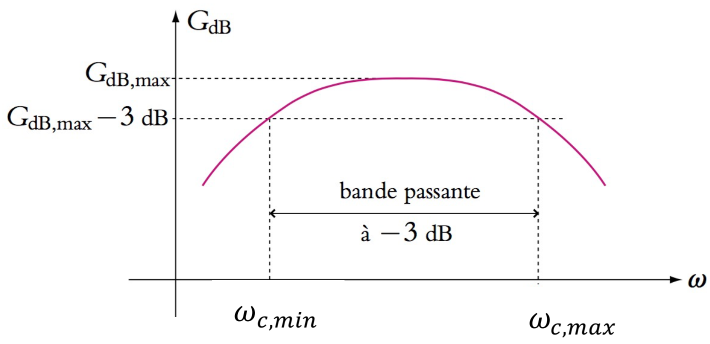
$$\Delta\omega = \omega_C - 0 = \omega_C$$



Le gain est supérieur à $G_{dB,max} - 3$ pour les pulsations supérieures à ω_C. La pulsation de coupure ω_C est donc une pulsation de coupure basse.
La bande passante est $[\omega_C\ , +\infty]$ et la largeur de bande passante n'est donc pas définie.

	Filtrage passe-bas	Filtrage passe haut
Bande passante	$[0\ ; \omega_C]$	$[\omega_C\ ; +\infty[$
Largeur de la bande passante	$\Delta\omega = \omega_C - 0 = \omega_C$	La largeur de bande passante n'est pas définie.

❖ Largeur de la bande passante à $-3dB$ d'un système passe-bande :



Dans le cas d'un passe-bande, il y a deux pulsations de coupure notées $\omega_{c,min}$ et $\omega_{c,max}$:

$\omega_{c,min}$: pulsation de coupure basse
$\omega_{c,max}$: pulsation de coupure haute

On appelle bande passante de ce système, l'intervalle suivant : $[\omega_{c,min}\,;\ \omega_{c,max}]$

On appelle largeur de bande passante à $-3dB$, notée $\Delta\omega$, (dont l'unité est le rad/s), la grandeur :

$$\Delta\omega = \omega_{c,max} - \omega_{c,min}$$

❖ Sens physique de la bande passante à $-3dB$: (à retenir)

P_E: puissance moyenne du signal d'entrée
P_S: puissance moyenne du signal de sortie

Pour un système ayant $T_0 = 1$:

D. <u>Exploitation du diagramme de Bode pour le gain en décibel $G_{dB}(\omega)$: asymptotes et pentes</u>

❖ Qu'est-ce qu'une asymptote ?

Une asymptote est une droite dont une courbe s'approche de plus en plus, sans jamais l'atteindre.

❖ Comment déterminer la pente des asymptotes en dB/décade ?

On exploite le graphe du gain en décibel :

1ère étape : Tracer l'asymptote (droite tangente à la courbe) à hautes fréquences/pulsations nommée ${G^{THF}}_{dB}$.
Tracer l'asymptote à basses fréquences/pulsations nommée ${G^{TBF}}_{dB}$.

2ème étape :
Si l'asymptote n'est pas parallèle à l'un des axes, choisir (sur l'axe des abscisses) une première valeur de pulsation ω_1
Sur l'asymptote, déterminer ensuite la valeur du gain $G_{1,dB}$ pour cette première valeur de pulsation ω_1

3ème étape :
Multiplier par 10 la première valeur de pulsation ω_1 , afin d'obtenir la deuxième valeur de pulsation ω_2
Sur l'asymptote, déterminer ensuite la valeur du gain $G_{2,dB}$ pour cette première valeur de pulsation ω_2

4ème étape :
En déduire la valeur (en décibel) de la variation du gain $\Delta G_{dB} = G_{2,dB} - G_{1,dB}$. Attention au signe de cette variation !

5ème étape :
La pente de l'asymptote est égale à ΔG_{dB} et son unité est le $dB/décade$.

- **Comment déterminer la pente des asymptotes en dB/octave ?**

La méthode est identique à celle décrite pour la pente en dB/décade, sauf pour la 3ème étape : il faut **multiplier par 2** la première valeur de pulsation ω_1 , afin d'obtenir la deuxième valeur de pulsation ω_2

E. <u>Exploitation du diagramme de Bode pour le gain en décibel $G_{dB}(\omega)$: exploitation des asymptotes</u>

- **Comment déterminer l'ordre n d'un système à l'aide d'un diagramme de Bode en gain ?**

Il faut avoir déterminer **la nature du filtrage et la pente des asymptotes** en dB/décade.
On rédige dans sa réponse la nature du filtrage et on applique la règle lui correspondant :

Pour un passe-bas, l'ordre n est le résultat de la division de la pente de l'asymptote à hautes fréquences par -20 .

Pour un passe-haut, l'ordre n est le résultat de la division de la pente de l'asymptote à basses fréquences par 20 .

Pour un passe-bande, l'ordre n est le résultat de la division de la pente de l'asymptote à basses fréquences par 10 (ou de la division de la pente de l'asymptote à hautes fréquences par -10

Puis on conclut sur l'ordre du système.

<u>Remarque :</u>
On peut utiliser les pentes des asymptotes en dB/octave : il faut alors remplacer dans la méthode précédente le nombre 20 par le nombre 6 (et le nombre 10 par le nombre 3).

- **Comment déterminer graphiquement la pulsation propre ω_0 des systèmes d'ordre 2 ?**

Pour les systèmes d'ordre 2, l'intersection des asymptotes ${G^{THF}}_{dB}$ et ${G^{TBF}}_{dB}$ a pour abscisse, la pulsation propre du système ω_0.

F. Exploitation du diagramme de Bode pour le gain en décibel $G_{dB}(\omega)$: amplification T_0

❖ Comment déterminer graphiquement l'amplification $|T_0|$?

1ème étape : avoir déterminer la nature du filtrage réalisé par le système.

2ème étape : Sur l'axe des ordonnées, on déterminer la valeur du gain, notée $G_{0,dB}$ (en dB)

- Pour un filtre passe-bas, $G_{0,dB}$ est la valeur du gain à basses fréquences (quand ω tend vers $0\ rad/s$)
- Pour un filtre passe-haut, $G_{0,dB}$ est la valeur du gain à hautes fréquences (quand ω tend vers $+\infty$)
- Pour un filtre passe-bande, $G_{0,dB}$ est la valeur du gain à la pulsation propre (pulsation centrale)

3ème étape : On en déduit $|T_0|$, par un calcul, en utilisant la formule suivante :

$$\boldsymbol{|T_0| = 10^{\frac{G_{0,dB}}{20}}}$$

L'amplification T_0 porte un nom différent selon la nature du filtre :

- Pour un filtre passe-bas, T_0 est nommé « amplification statique ».
- Pour un filtre passe-haut, T_0 est nommé « amplification à hautes fréquences ».
- Pour un filtre passe-bande, T_0 est nommé « amplification dans la bande passante » ou encore « amplification à la pulsation propre »

Si on sait que $\boldsymbol{T_0}$ **est positif**, alors la formule devient :

$$\boldsymbol{T_0 = 10^{\frac{G_{0,dB}}{20}}}$$

G. Exploitation du diagramme de Bode pour le déphasage $\varphi(\omega)$:

❖ Comment déterminer l'ordre n d'un système en utilisant le graphe $\varphi(\omega)$?

1ère étape :

Il faut déterminer graphiquement le domaine de variation du déphasage noté $\Delta\varphi$, en suivant la formule suivante :

$$\Delta\varphi = |\varphi_{HF} - \varphi_{BF}|$$

φ_{HF} : valeur du déphasage pour les hautes fréquences du signal d'entrée

φ_{BF} : valeur du déphasage pour les basses fréquences du signal d'entrée

2ème étape :

On détermine enfin l'ordre n à l'aide de la formule suivante :

$$\Delta\varphi = n \times \frac{\pi}{2}$$

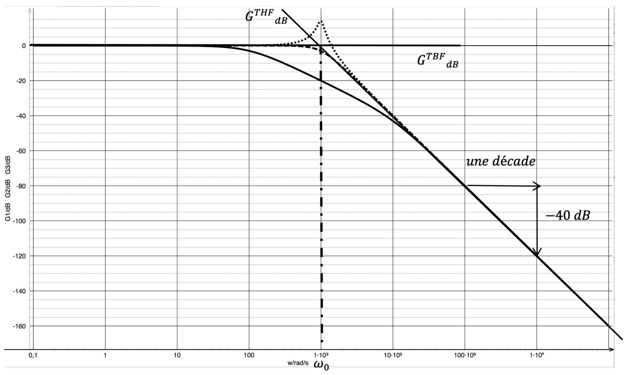
III. Influence du facteur de qualité Q sur le filtrage des systèmes d’ordre 02 :

A. Résonance en amplitude des systèmes passe-bas et passe-haut d’ordre 2 :

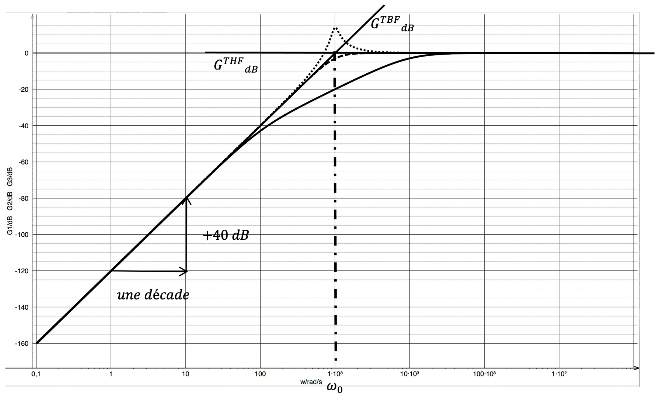
Illustrations pour des systèmes ayant comme amplification $T_0 = 1$ *:*

	————	━ ━ ━ ━ ━	· · · · · · ·
Q	0,10	0,70	5,0
$\omega_0\ (rad/s)$	1000	1000	1000
$G_{0,dB}$	0	0	0

Passe-bas d’ordre 02



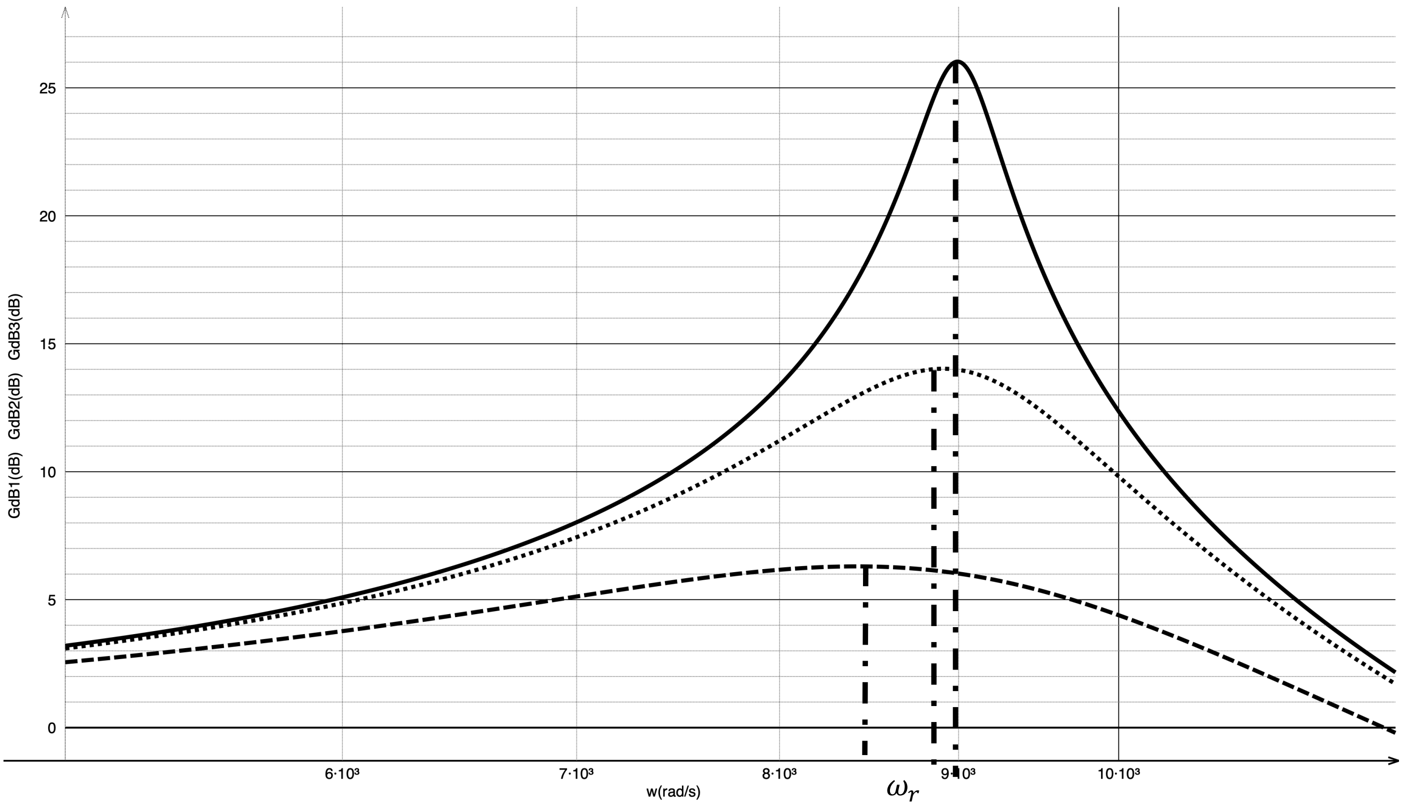
Passe-haut d’ordre 02



- **Qu’est-ce que la résonance en amplitude ? (à retenir)**

Illustrations pour des systèmes passe-bas ayant comme amplification $T_0 = 1\ et\ \omega_0 = 9000\ rad/s$ *:*

	————	· · · · · · ·	━ ━ ━ ━ ━
Q	20	5,0	2,0
$\omega_r\ (rad/s)$	9000	8800	8300



❖ **Résonance en amplitude aigüe : (à retenir)**

<u>*Remarque :*</u>
L'intérêt d'un filtre passe-bas est d'atténuer les hautes fréquences ; or s'il y a résonance en amplitude, on voit sur le diagramme que la courbe réelle rejoint moins rapidement l'asymptote. On s'arrange donc en général pour que le facteur de qualité Q soit inférieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

B. <u>Pulsation de coupure des systèmes passe-bas et passe-haut d'ordre 2 :</u>

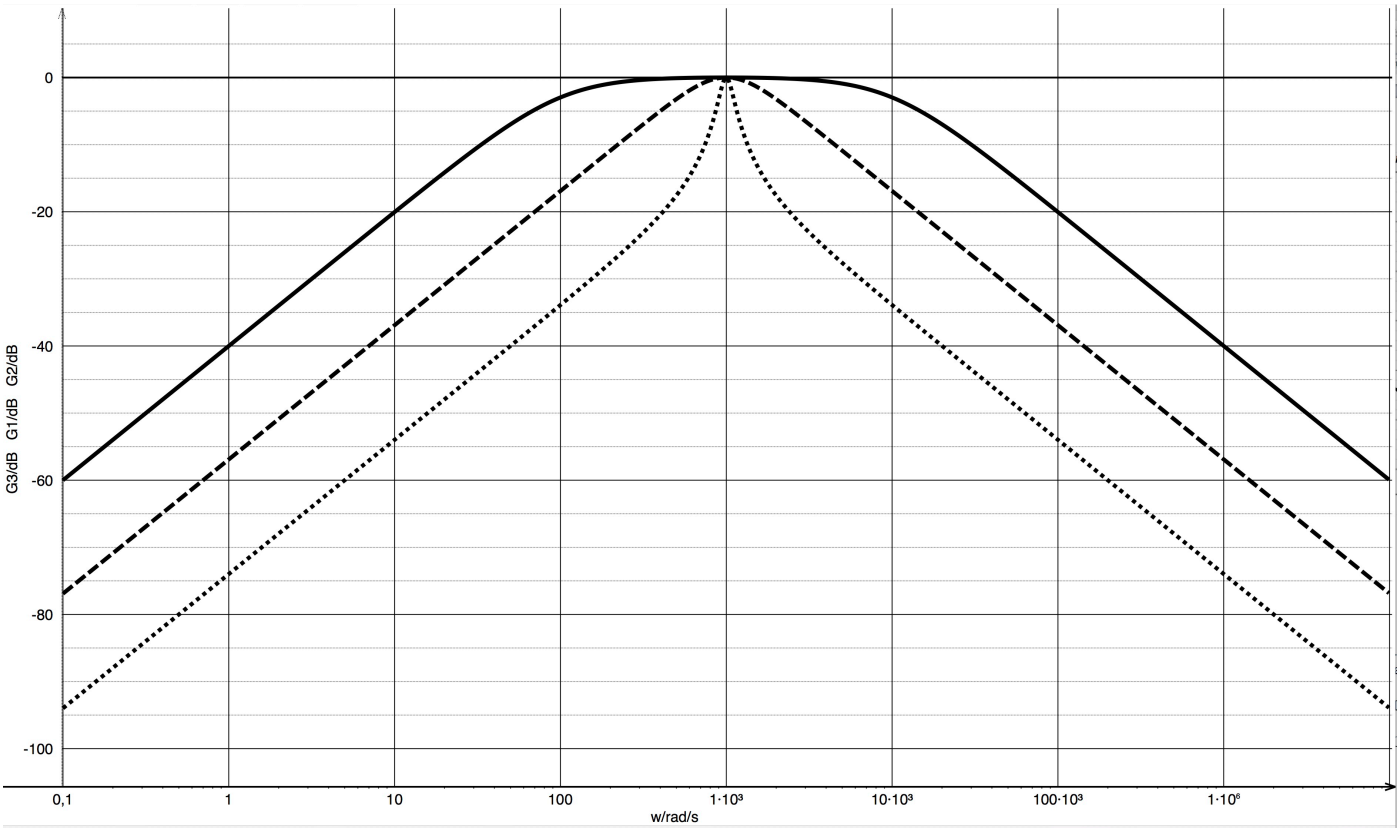
❖ **Comment déterminer/prévoir la pulsation de coupure d'un système passe-bas ou passe-haut d'ordre 02 ?**

Pour les systèmes **passe-haut et passe-bas d'ordre 2**, la pulsation propre ω_0 du système est identique à la pulsation de coupure ω_C du système si le facteur de qualité est $Q = 0,707$:

C. Systèmes passe-bande d'ordre 2 :

Illustrations pour des systèmes passe-bande ayant comme amplification $T_0 = 1$ *:*

	——— (trait plein)	- - - - (tirets)	· · · · (pointillés)
Q	0,10	0,70	5,0
$\omega_0\ (rad/s)$	1000	1000	1000
$G_{0,dB}$	0	0	0



❖ Influence du facteur de qualité pour un passe-bande d'ordre 02 :

❖ Comment déterminer la valeur du facteur de qualité Q pour un passe-bande d'ordre 02 ?

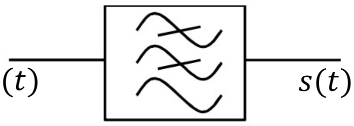
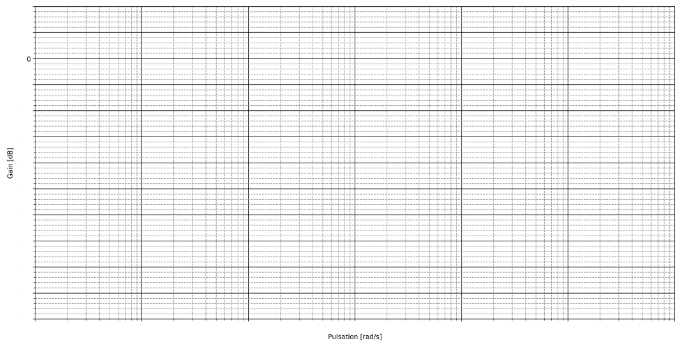
IV. Filtres idéaux, cahier des charges et gabarits :

En première approximation, on peut considérer qu'un filtre coupe les composantes du signal dont la pulsation est hors bande passante et laisse passer celles dont la pulsation est dans la bande passante. On aboutit ainsi au diagramme de Bode en gain, d'un filtre idéal.

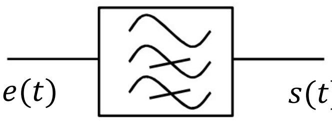
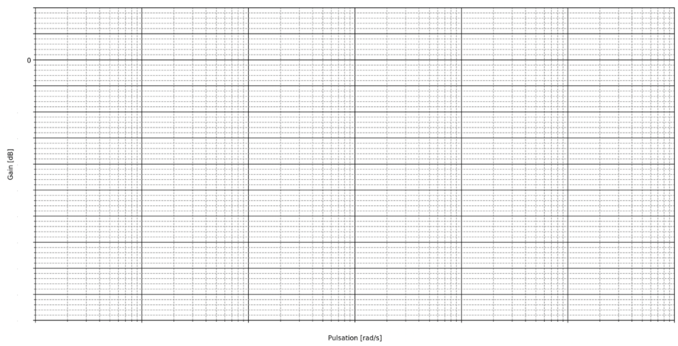
A. Filtres idéaux

Le filtre idéal permet de transmettre une partie du spectre (celle contenue dans la bande passante) et bloque toutes les autres parties (bande coupée), avec un passage abrupt entre ces deux parties (discontinuité de $G_{dB}(\omega)$).

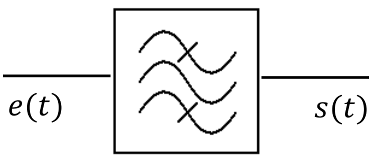
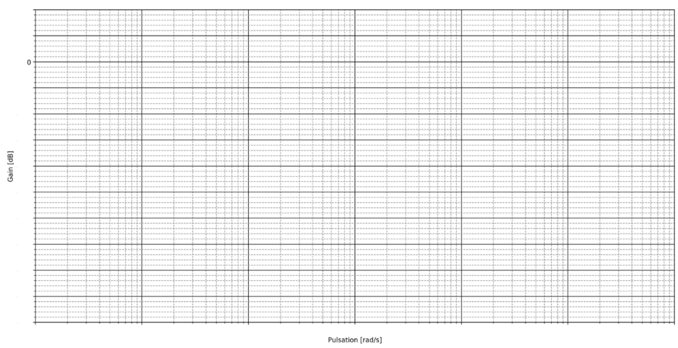
❖ **Passe-bas idéal :** *(à savoir)*

Représentation symbolique	Allure de $G_{dB}(\omega)$ pour le cas idéal
$e(t)$  $s(t)$	

❖ **Passe-haut idéal :** *(à savoir)*

Représentation symbolique	Allure de $G_{dB}(\omega)$ pour le cas idéal
$e(t)$  $s(t)$	

❖ **Passe-bande idéal :** *(à savoir)*

Représentation symbolique	Allure de $G_{dB}(\omega)$ pour le cas idéal
$e(t)$  $s(t)$	

Le filtre idéal n'est pas réalisable : il présente une discontinuité de la courbe du gain. Un filtre réel présente donc des écarts avec le filtre idéal :

- Le gain dans la bande passante $G_{0,dB}$ est non constant
- Le gain dans la bande coupée est différent de $-\infty$.

Il faut donc faire des **compromis** en fonction de l'utilité du système réel filtrant.
Le filtre « réel » fait en général parti d'une chaine de traitement du signal (le système « filtre » est donc une sous partie d'un système plus complexe).

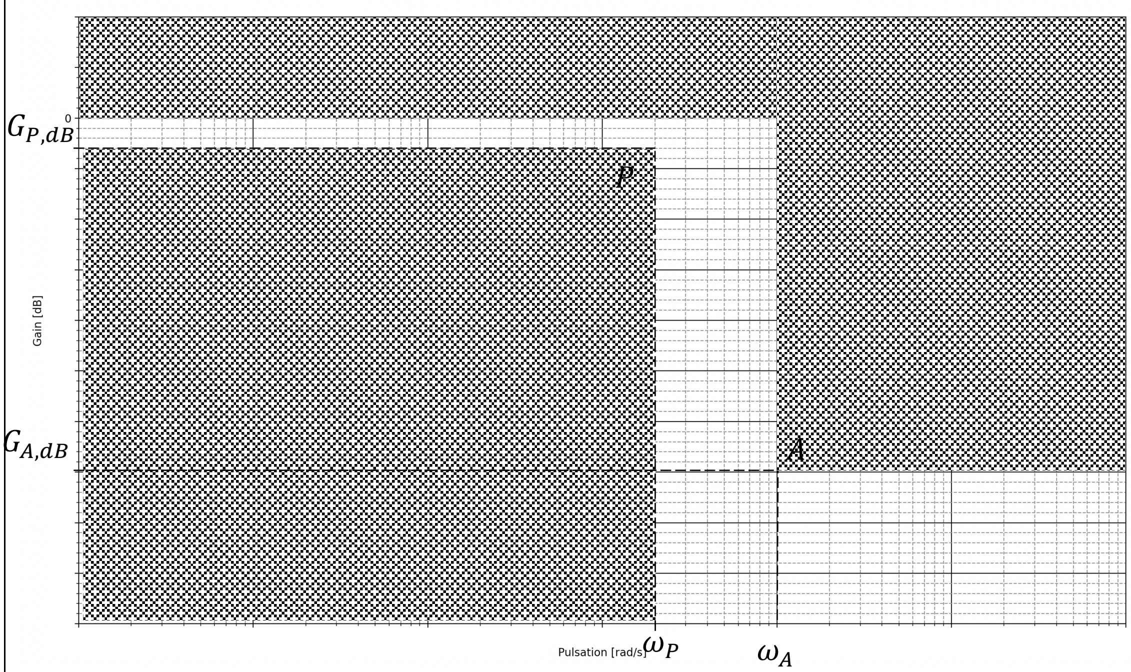
B. <u>Gabarit à partir d'un cahier des charges :</u>

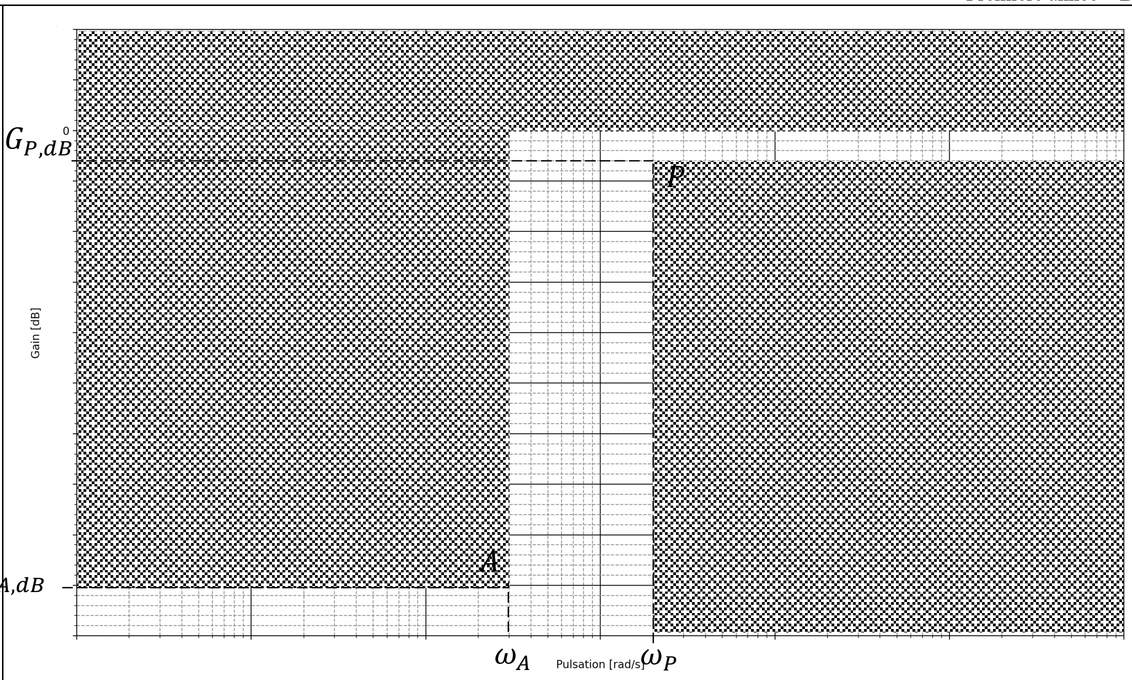
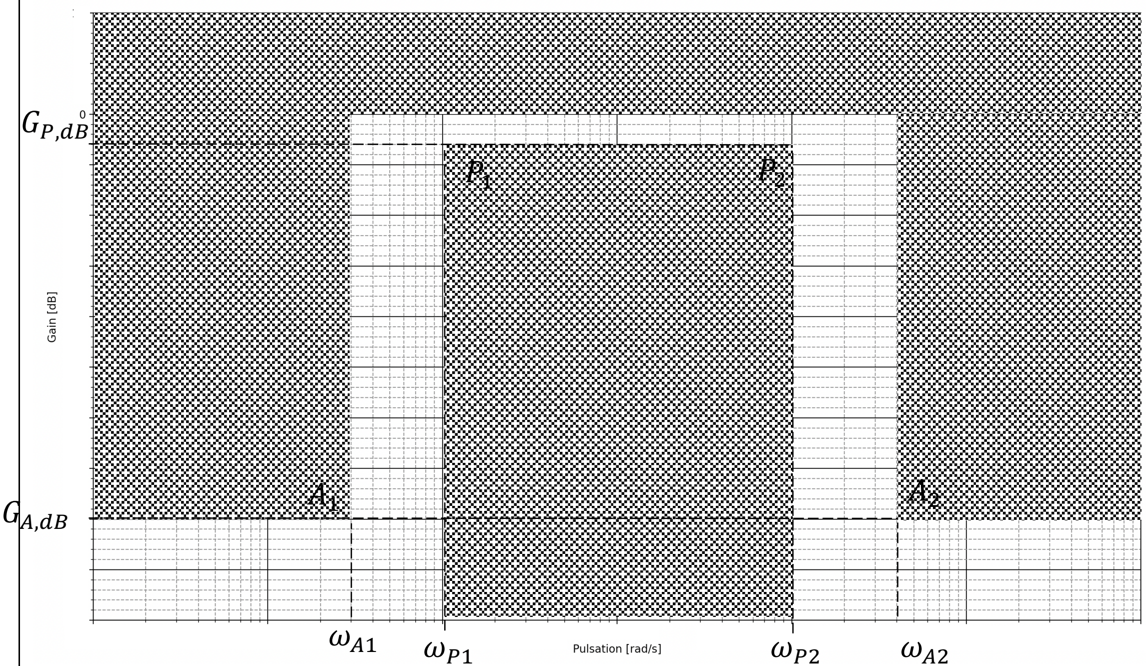
❖ **Qu'est-ce qu'un gabarit ? (à savoir)**

Le concepteur de l'ensemble du système fixe un cahier des charges pour le filtre. Ce cahier des charges est regroupé sur un graphique appelé, **gabarit du filtre**. Ce gabarit fixe donc les limites tolérées par le concepteur du système étudié.

<u>En pratique (dans les exercices) :</u>
Les limites tolérées du gabarit sont données sous forme de coordonnées de points, nommés dans la suite du chapitre, $A(\omega_A\,;G_{A,dB})\;et\;P(\omega_P\,;G_{P,dB})$.

❖ **Les différentes formes de gabarits (à savoir tracer) :**

Type de filtre recherché	Gabarit
Passe-bas	 zone interdite tracé des coordonnées des points $A\;et\;P$

Passe-haut	 zone interdite tracé des coordonnées des points A et P
Passe-bande	 zone interdite tracé des coordonnées des points A_1, A_2, P_1 et P_2

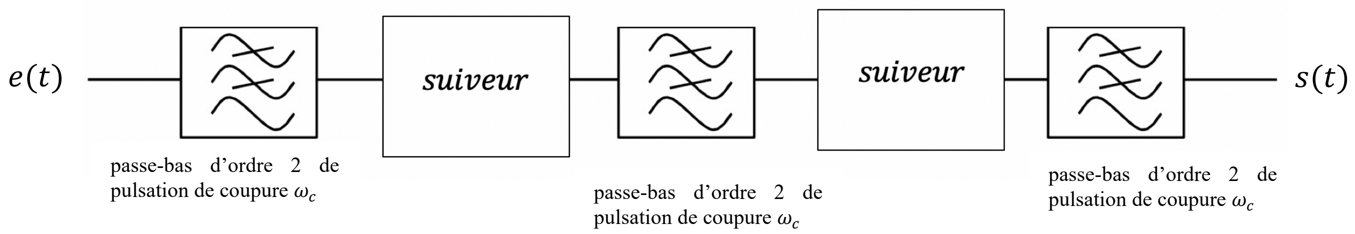
❖ **Méthode pour tracer et utiliser un gabarit :** *(à savoir-faire)*

1ère étape : À partir des coordonnées données dans l'énoncé des points A et P, tracer (sur le graphe fourni) les points A et P. *2ème étape :* A l'aide du modèle de gabarit donné, hachurer les zones interdites. *3ème étape :* Si la courbe du gain du filtre (sur le graphe fourni) n'empiète pas sur une zone interdite du gabarit, le filtre valide les conditions du cahier des charges.

V. Approximations de Butterworth et Chebyshev :

A. Création d'un filtre passe-bas d'ordre n, supérieur à 2 :

Si on souhaite par exemple, obtenir un passe-bas d'ordre 6, on peut envisager la solution technique suivante :



Remarque :
Les systèmes « suiveur » permettent d'assurer qu'il y ait adaptation d'impédances en tension entre deux filtres successifs.

L'enchainement de 3 systèmes passe-bas d'ordre 2 (de pulsation de coupure ω_c) ne permet pas d'obtenir une pulsation de coupure égale à ω_c pour le système d'ordre 6.
La pulsation de coupure du système d'ordre 6 est plus faible que ω_c : le système synthétisé possède donc une largeur de bande passante plus faible.
Comment augmenter l'ordre d'un système (c'est-à-dire obtenir une atténuation importante) tout en conservant la même pulsation de coupure à $-3dB$ (donc la même bande passante) ?

B. Approximation de Butterworth :

Vocabulaire : pourquoi parle-t-on d'approximation ?

Une fonction d'approximation consiste à rechercher le système ayant une transmittance isochrone complexe avec un ordre le plus faible possible, tout en respectant/validant le gabarit fixé par le cahier des charges.

❖ **Transmittance pour des passe-bas de type Butterworth :**

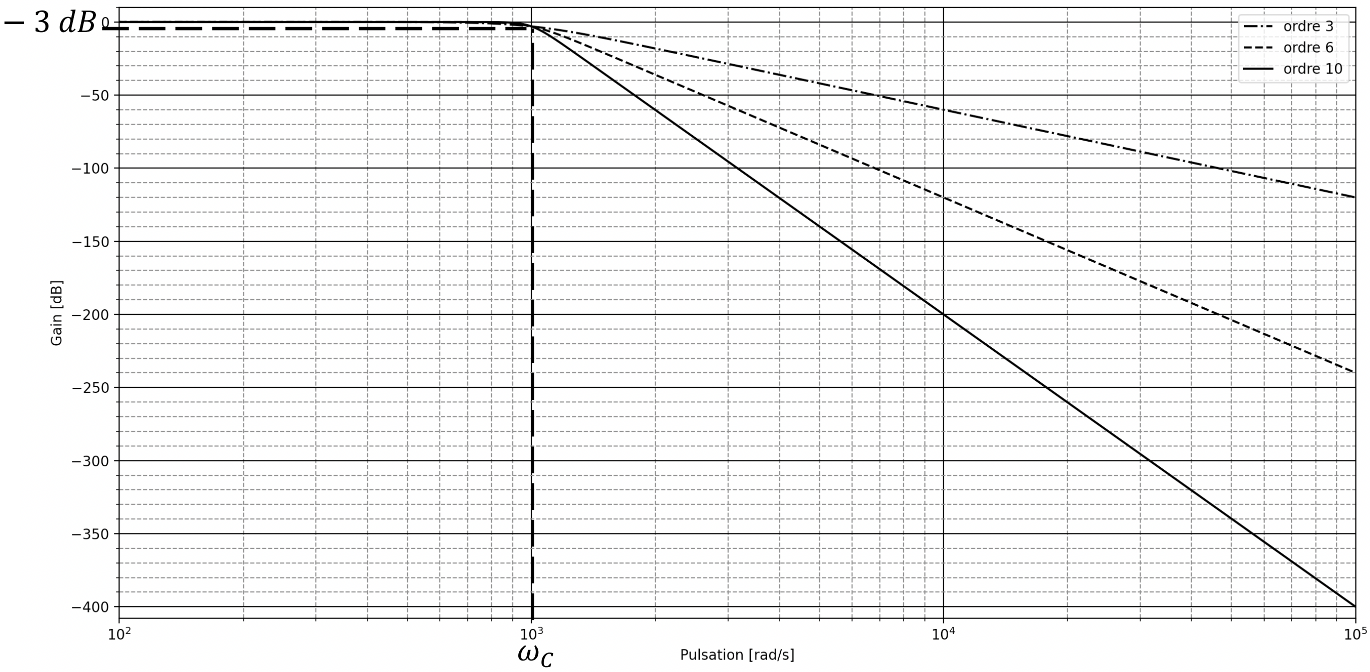
Les systèmes passe-bas de Butterworth d'ordre n, ont pour transmittance isochrone complexe :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{f(s)}, avec\ s = j\frac{\omega}{\omega_C}$$

avec n : ordre du filtre
ω_C: pulsation de coupure du filtre à $-3dB$
$f(s)$: fonction de la variable s dont l'expression dépend de l'ordre n (voir tableau ci-dessous)

Ordre	Expression du dénominateur : $f(s)$
$n = 1$	$s + 1$
$n = 2$	$s^2 + 1{,}41s + 1$
$n = 3$	$s^3 + 2s^2 + 2s + 1$
$n = 4$	$s^4 + 2{,}6131s^3 + 3{,}4142s^2 + 2{,}6131s + 1$
$n = 5$	$s^5 + 3{,}2361s^4 + 5{,}2361s^3 + 5{,}2361s^2 + 3{,}2361s + 1$
$n = 6$	$s^6 + 3{,}8537s^5 + 7{,}4741s^4 + 9{,}1416s^3 + 7{,}4741s^2 + 3{,}8537s + 1$

<u>Exemples de diagrammes de Bode en gain $G_{dB}(\omega)$, pour des passe-bas de type Butterworth :</u>

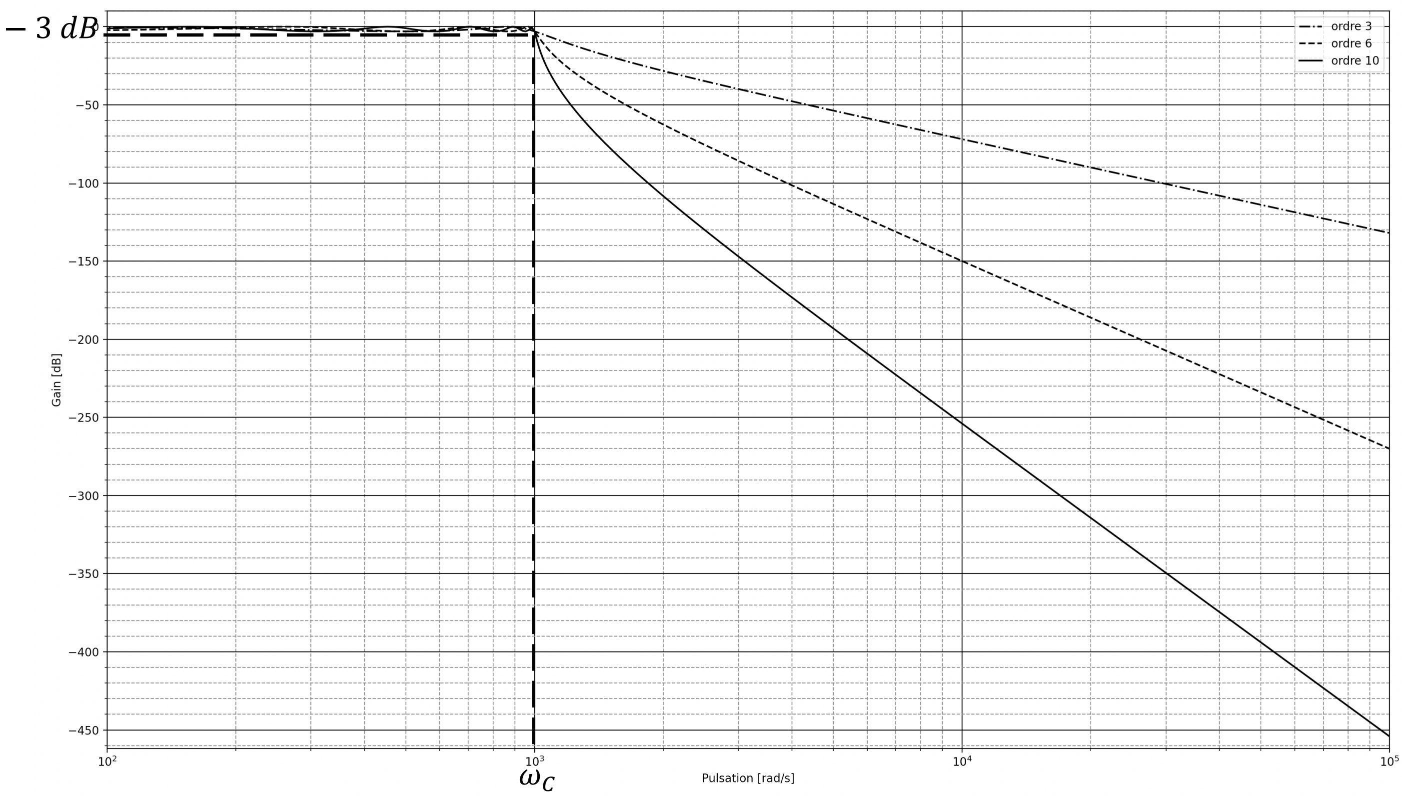


Ordre	3	6	10
Valeur de ω_C	$10^3\ rad/s$	$10^3\ rad/s$	$10^3\ rad/s$
Pente de l'asymptote à haute fréquence	$-60\ dB/décade$	$-120\ dB/décade$	$-200\ dB/décade$
Gain à la pulsation $\omega = 10^4\ rad/s$			

❖ **Intérêt des systèmes de Butterworth : (à retenir)**

C. Approximation de Chebyshev :

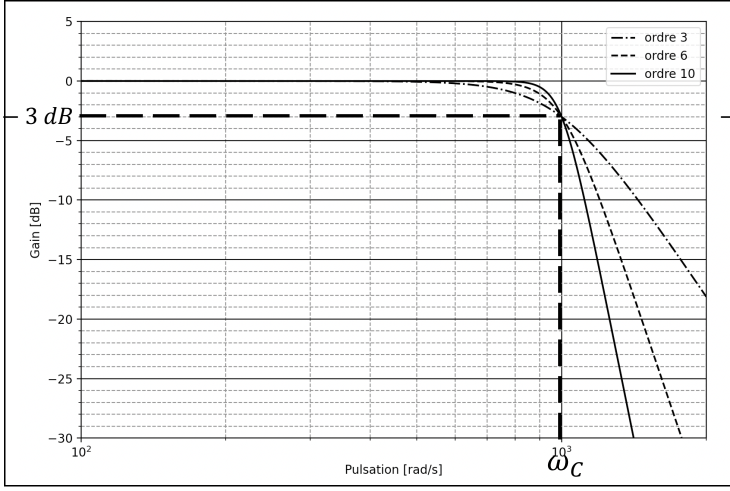
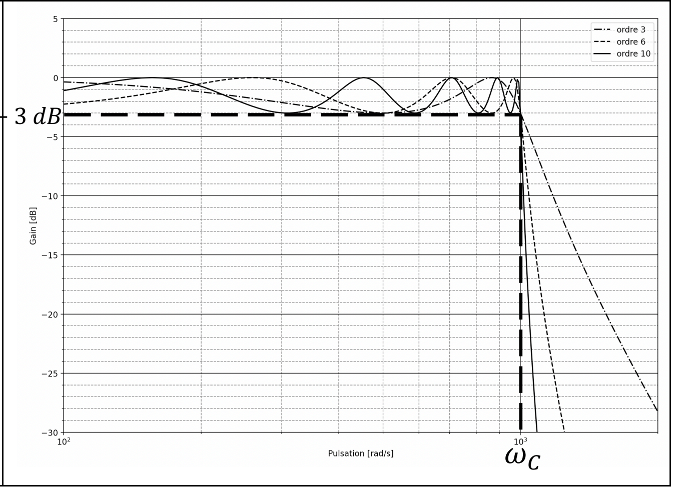
Exemples de $G_{dB}(\omega)$ pour des passe-bas de type Chebyshev, avec pulsation de coupure à $-3\ dB$:



Ordre	3	6	10
Valeur de ω_C	$10^3\ rad/s$	$10^3\ rad/s$	$10^3\ rad/s$
Pente de l'asymptote à haute fréquence	$-60\ dB/décade$	$-120\ dB/décade$	$-200\ dB/décade$
Gain à la pulsation $\omega = 10^4\ rad/s$			

❖ **Intérêt des systèmes de Chebyshev par rapport à Butterworth: (à retenir)**

❖ Désavantage des systèmes de Chebyshev par rapport à Butterworth:

Zoom autour de la pulsation de coupure pour les systèmes de type Butterworth	Zoom autour de la pulsation de coupure pour les systèmes de type Chebyshev
	

Pour réduire l'amplitude de l'ondulation du gain dans la bande passante de Chebyshev, le théoricien a travaillé pour trouver une approximation avec une pulsation de coupure à $-1\ dB$ (ou encore $-0{,}1\ dB$)

❖ Transmittance pour des passe-bas de type Chebyshev, avec pulsation de coupure à $-1\ dB$:

Les systèmes passe-bas de Chebyshev d'ordre n, ont comme transmittance isochrone complexe, pour une atténuation de $-1dB$ dans la bande passante :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{0{,}891}{f(s)}, avec\ s = j\frac{\omega}{\omega_C}$$

avec n : ordre du filtre

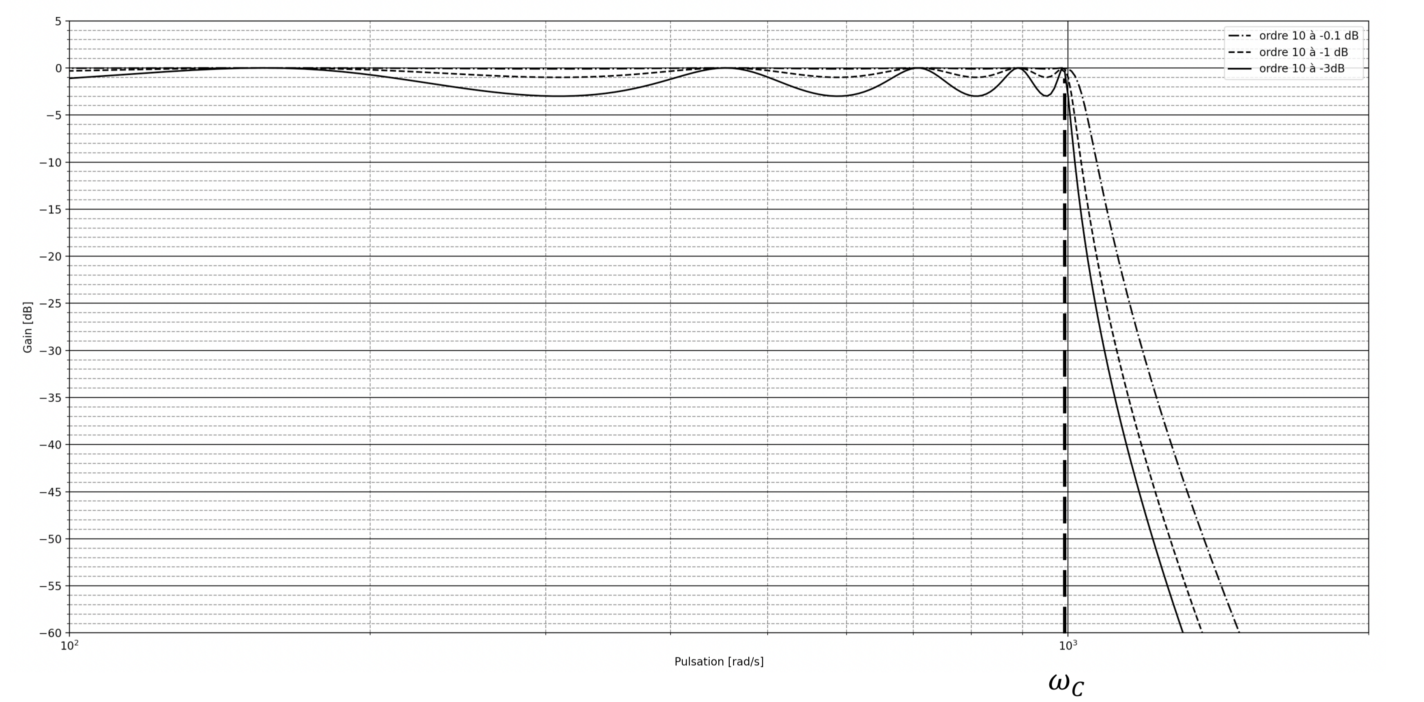
ω_C: pulsation de coupure du filtre à $-1dB$

$f(s)$: fonction de la variable s dont l'expression dépend de l'ordre n (voir tableau ci-dessous)

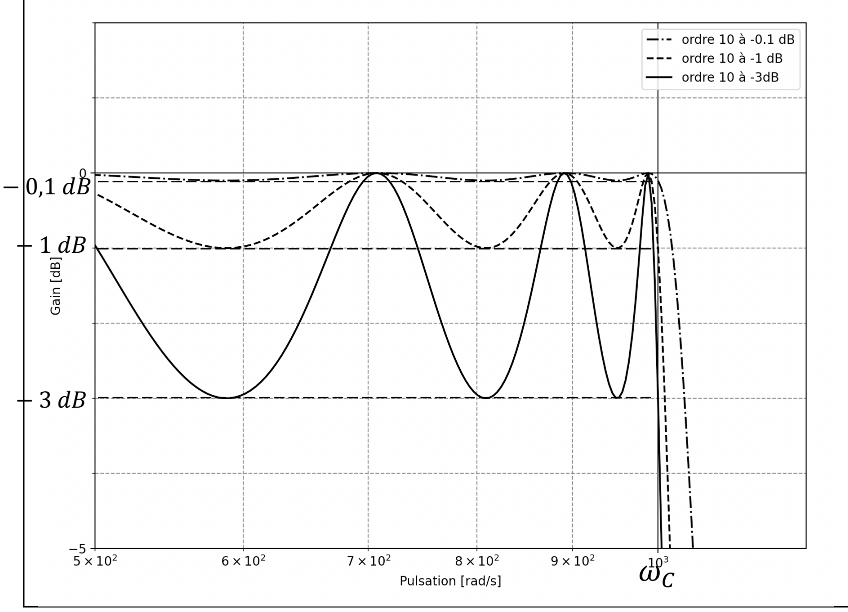
Ordre	Expression du dénominateur : $f(s)$
$n = 1$	$0{,}509s + 1$
$n = 2$	$0{,}907s^2 + 0{,}9957s + 1$
$n = 3$	$2{,}0353s^3 + 2{,}0116s^2 + 2{,}5206s + 1$
$n = 4$	$3{,}628s^4 + 3{,}4568s^3 + 5{,}2749s^2 + 2{,}6942s + 1$
$n = 5$	$8{,}1415s^5 + 7{,}6271s^4 + 13{,}75s^3 + 7{,}933s^2 + 4{,}7264s + 1$
$n = 6$	$14{,}512s^6 + 13{,}47s^5 + 28{,}02s^4 + 17{,}445s^3 + 13{,}632s^2 + 4{,}456s + 1$

Exemples de $G_{dB}(\omega)$ pour des passe-bas de type Chebyshev, avec pulsation de coupure à $-3\ dB$, puis $-1\ dB$ et $-0{,}1\ dB$:

Système passe-bas d'ordre 10 de type Chebyshev
avec pulsation de coupure à $-3\ dB$, $puis - 1\ dB\ et - 0{,}1\ dB$



Zoom autour de la pulsation de coupure



A retenir :

Pour des systèmes passe-bas d'ordre identiques de type Chebyshev, l'utilisation d'une pulsation de coupure ω_C à $-0{,}1\ dB$ a l'avantage de réduire l'amplitude des ondulations du gain dans la bande passante, mais a pour effet de diminuer l'atténuation des hautes fréquences.

Il faut donc éventuellement augmenter l'ordre (et le coût) du système pour valider le gabarit.

Chapitre 09 : ce qu'il faut savoir

- Connaître la fonction réciproque de log
- Connaitre les bandes passantes des filtres usuels ainsi que leur largeur.
- Connaître la relation entre l'amplification en tension et le gain en dB
- Connaître le lien entre le signe de G_{dB} et les mots « passeur, atténuateur, amplificateur »
- Connaître et savoir différencier gain statique, gain à la fréquence propre et gain en hautes fréquences
- Connaitre l'ensemble des méthodes d'exploitation graphique d'un diagramme de Bode
- Connaître les conditions de résonance en amplitude pour le passe-bas et le passe-haut d'ordre 2.
- Connaitre la formule $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$ pour le passe-bande d'ordre 2
- Connaître les avantages et les inconvénients des approximations de Butterworth et Chebyshev.

Chapitre 09 : ce qu'il faut savoir faire

- Savoir utiliser la relation entre l'amplification en tension et le gain en dB
- Savoir déterminer le gain (en dB) à une fréquence donnée à partir du diagramme de Bode d'un filtre.
- Savoir déterminer les caractéristiques du signal de sortie d'un filtre à partir de celles du signal d'entrée et du diagramme de Bode du filtre (amplitude et phase)
- Savoir identifier la nature d'un filtre à partir de son diagramme de Bode (passe haut, passe-bas, passe bande)
- Savoir déterminer la (ou les) fréquence(s) de coupure à partir de la courbe de gain
- Savoir tracer les asymptotes à $G_{dB}(\omega)$ et déterminer leur pente.
- Savoir tracer le diagramme asymptotique (à partir du diagramme de Bode : gain et phase) et l'exploiter pour déterminer la pulsation propre, la pente des asymptotes (en dB/décade et dB/octave), et l'ordre du filtre
- Savoir déterminer graphiquement l'amplification T_0
- Savoir déterminer la pulsation de résonance ω_r.
- Savoir déterminer graphiquement le domaine de variation du déphasage $\Delta\varphi$
- Savoir déterminer graphiquement la largeur de la bande passante d'un filtre
- Savoir déterminer graphiquement le facteur de qualité d'un passe-bande à l'aide de la formule $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$
- Savoir tracer le graphe $G_{dB}(\omega)$ pour des filtres idéaux
- Savoir tracer un gabarit pour un cahier des charges donné et choisir le filtre validant le gabarit.