L'ESSENTIEL

> Il y a environ deux siècles, Joseph Fourier a proposé une méthode puissante pour résoudre l'équation de propagation de la chaleur.

> Cette méthode consiste à représenter une fonction *f* sous la forme d'une somme de sinusoïdes, pondérées par des coefficients numériques qui se calculent à partir de *f*.

> Cet outil mathématique permet de représenter avec une bonne approximation un signal de durée finie à l'aide d'un nombre limité de coefficients.

> Les raffinements successifs de l'analyse de Fourier, notamment avec les représentations par ondelettes, sont au cœur des technologies numériques d'aujourd'hui.

LES AUTEURS



PATRICK FLANDRIN
physicien à l'École normale supérieure de Lyon

STÉPHANE JAFFARD
mathématicien à l'université Paris-Est Créteil Val-de-Marne

JEAN-MICHEL MOREL
mathématicien à l'École normale supérieure Paris-Saclay

L'analyse de Fourier, pilier du numérique

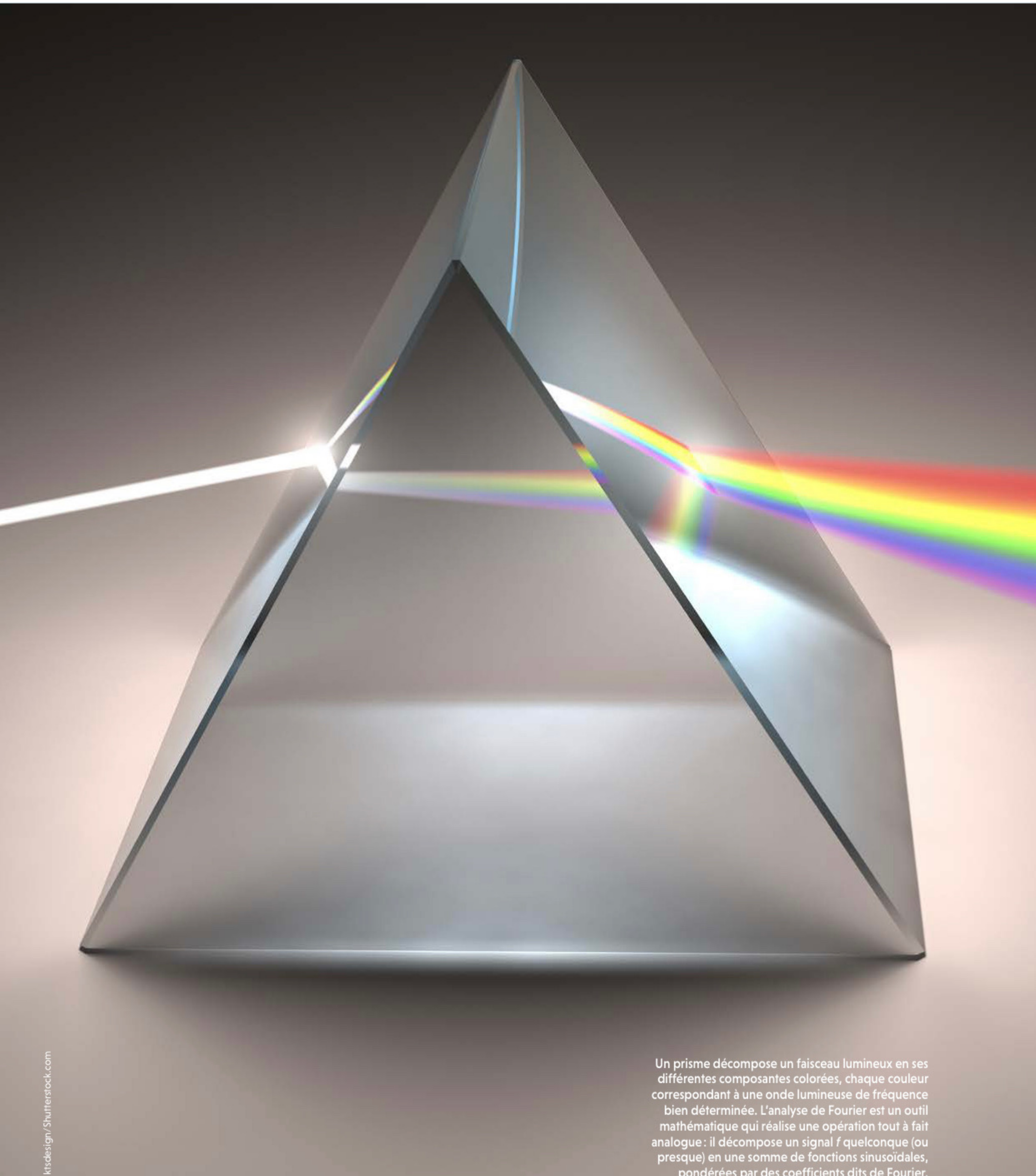
Représenter une fonction ou un signal quelconque sous la forme d'une somme de fonctions élémentaires et aisément calculables : telle est la philosophie qui sous-tend la méthode mathématique mise au point au début du XIXe siècle par Joseph Fourier. Cet outil universel a connu plusieurs avatars récents qui lui donnent un rôle clé dans la révolution numérique en cours.

De nombreuses commémorations du 250e anniversaire de la naissance de Joseph Fourier ont jalonné l'année 2018. Ce mathématicien, physicien, administrateur et égyptologue a publié en 1822 un mémoire, intitulé *Théorie analytique de la chaleur*, qui a placé son nom au panthéon de la science. Les méthodes et outils qu'il y introduisait ont constitué une avancée considérable pour la physique mathématique et la physique théorique. Mais leur portée va bien au-delà : les techniques de traitement du signal qui en sont issues sont aujourd'hui utilisées massivement dans toutes les sciences et technologies du numérique, du codage de la voix dans les téléphones portables à la transmission des images par Internet.

En fait, l'« analyse de Fourier » est au cœur de la révolution numérique actuelle. Et même si elle est âgée de plus de deux siècles, elle continue à se développer et se perfectionner, comme nous allons le voir.

L'expression « analyse de Fourier » désigne les méthodes introduites par Fourier pour représenter une fonction quelconque sous la forme d'une somme de fonctions élémentaires. L'idée remonte au XVIIIe siècle et au savant suisse Daniel Bernoulli, qui cherchait à résoudre l'équation régissant la propagation des vibrations le long d'une corde (c'est-à-dire une version de l'équation des ondes, *voir la figure page 56*).

Dans sa *Théorie analytique de la chaleur*, Fourier développait une théorie décrivant la propagation de la chaleur, et aboutissait à une équation générale à laquelle ce processus obéit. Pour résoudre cette équation, Fourier >



© ktsdesign/Shutterstock.com

Un prisme décompose un faisceau lumineux en ses différentes composantes colorées, chaque couleur correspondant à une onde lumineuse de fréquence bien déterminée. L'analyse de Fourier est un outil mathématique qui réalise une opération tout à fait analogue : il décompose un signal *f* quelconque (ou presque) en une somme de fonctions sinusoïdales, pondérées par des coefficients dits de Fourier.

> entreprit, à la suite de Daniel Bernoulli, de représenter toute fonction $f(x)$ comme une somme (une «série») de fonctions sinusoïdales, éventuellement en nombre infini: les fonctions du type $\sin(nx)$ où n est un nombre entier positif arbitraire. Il remarqua que quand la répartition initiale de la température est décrite par de telles sinusoïdes, les calculs d'une solution de l'équation de propagation de la chaleur se simplifient considérablement.

L'ATOUT DES FONCTIONS SINUSOÏDALES

L'atout des fonctions sinusoïdales dans ce contexte tient à la conjonction de deux propriétés. La première est que les équations considérées sont «linéaires». Qu'est-ce que cela signifie? Les fonctions f qui y jouent le rôle d'inconnues n'apparaissent qu'au premier degré: il n'y a pas de termes comportant une puissance de f autre que 1, par exemple des termes en f^2 ou en $1/f$. Il s'ensuit que ces équations sont linéaires, c'est-à-dire que si l'on a deux fonctions f_1 et f_2 obéissant à l'équation, alors toute fonction de la forme af_1+bf_2, où a et b sont des nombres quelconques, est aussi une solution de cette équation. Cette propriété fondamentale de linéarité se retrouve dans de très nombreuses équations de la physique, au moins quand on décrit les phénomènes en première approximation.

Il s'agit généralement d'équations différentielles (équations où la fonction inconnue intervient avec ses dérivées), et à la linéarité de celles-ci s'ajoute l'autre propriété fondamentale: les fonctions sinusoïdales sont proportionnelles à l'opposé de leur dérivée seconde. En effet, la dérivée seconde (par rapport à x) de $\sin(ax)$ est égale à $-a^2\sin(ax)$.

Pour illustrer l'intérêt de ces fonctions, supposons que l'on cherche à résoudre l'équation linéaire $f''(x)=\sin(x)+2\sin(3x)$ (c'est un exemple, à une dimension, d'équation de Poisson) où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction inconnue f. On peut alors chercher une solution f de la forme :

$$f(x)=a\sin(x)+b\sin(3x).$$

Comme on a $\sin''(x)=-\sin(x)$ et $(\sin(3x))''=-9\sin(3x)$, l'équation devient:

$$f''(x)=-a\sin(x)-9b\sin(3x)$$
$$=\sin(x)+2\sin(3x).$$

On obtient donc une solution en égalisant les coefficients des sinusoïdes des deux côtés de l'équation, ce qui donne $a=-1$ et $b=-2/9$.

Pour que le procédé puisse s'appliquer de façon générale, il faut démontrer l'universalité de la décomposition en série de sinusoïdes d'une fonction f quelconque, et surtout disposer d'une formule de calcul des coefficients de la décomposition. C'est à cette formule fondamentale que Fourier parvient dans son ouvrage. Si l'on considère une fonction

Quelques-unes des équations fondamentales de la physique sont indiquées ici dans leur version la plus simple (sans coefficients numériques). Ici, t désigne le temps, x, y, z les coordonnées d'espace, et f représente une fonction $f(x, y, z, t)$ dont la valeur dépend de la position (x, y, z) et de l'instant t. La notation $\partial f/\partial x$ désigne la dérivée (dite partielle) de f par rapport à la variable x, et $\partial^2 f/\partial x^2$ désigne la dérivée seconde de f par rapport à x. Les équations de Laplace et de Poisson interviennent notamment en mécanique des fluides incompressibles et en électrostatique. Comme leur nom l'indique, l'équation des ondes régit la propagation des ondes, et celle de la chaleur régit la propagation de la chaleur. Grâce à la linéarité de ces équations, l'analyse de Fourier permet de les étudier, voire de les résoudre, efficacement.

ÉQUATION DE LAPLACE	$\Delta f=0$
où Δf désigne le laplacien de f, défini par:	$\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
ÉQUATION DE POISSON (où g est une fonction donnée)	$\Delta f=g$
ÉQUATION DES ONDES	$\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$
ÉQUATION DE LA CHALEUR	$\Delta f=\dfrac{\partial f}{\partial t}$

LA TRANSFORMATION DE FOURIER RAPIDE

Le calcul direct de la transformée de Fourier d'un signal discret de N échantillons (c'est-à-dire défini par la donnée de N valeurs numériques consécutives) nécessite de l'ordre de N^2 opérations, ce qui devient rapidement prohibitif lorsque N est grand. Il existe cependant des algorithmes plus rapides, dits de FFT (pour *Fast Fourier Transform*). Le plus célèbre est celui proposé en 1965 par James Cooley et John Tukey lorsque N est une puissance de 2. En appliquant récursivement une stratégie faisant porter le calcul sur des séquences de taille moitié, cet algorithme réduit la complexité du calcul à un nombre d'opérations de l'ordre de $N \log_2 N$. Ainsi, on gagne un facteur 32 pour un signal de N = 256 échantillons. Le facteur de gain dépasse 4 000 lorsque N = 65 234 (soit 2^{16}) ; il est d'autant plus élevé que N est grand. L'avènement de la FFT a été fondamental pour la mise en œuvre pratique et à grande échelle de méthodes fondées sur la transformation de Fourier. La FFT est vraisemblablement le second algorithme le plus utilisé au monde, juste après l'algorithme de tri (*Quick sort* ou *Merge sort*) utilisé pour stocker ou récupérer des données dans les mémoires informatiques.

La méthode de Fourier s'applique aussi aux fonctions de plusieurs variables

quelconque (mais suffisamment régulière) $f(x)$ définie sur l'intervalle $[0, \pi]$, elle peut s'écrire sous la forme :
$f(x) = a_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin(2x) + ... + a_n \sin(nx) + ...$

Dans cette représentation de f par une « série de Fourier », chaque coefficient s'obtient par une simple formule intégrale :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, \sin(nx)\, dx$$

Cette formule explicite le n-ième coefficient de la fonction $f(x)$ sur la base constituée par les fonctions élémentaires $\sin(nx)$. On l'interprétera plus tard comme le calcul d'un « produit scalaire » entre la fonction $f(x)$ et l'élément $\sin(nx)$ de la base de Fourier. En effet, dans ce contexte, un produit scalaire entre deux fonctions f et g définies sur $[0, \pi]$ peut être défini par la formule :

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$

Et l'on montre aisément que la base formée par les fonctions $\sin(nx)$ est orthonormée, c'est-à-dire que le produit scalaire de $\sin(mx)$ et de $\sin(nx)$ est égal à 0 si $m \neq n$, et égal à 1 si $m = n$. Autrement dit, la représentation de f par une série de Fourier revient à exprimer un vecteur f à l'aide d'une base orthonormée constituée des vecteurs $\sin(nx)$, qui sont de norme unité et orthogonaux entre eux.

Ces considérations et formules s'étendent sans difficulté (moyennant des modifications des divers facteurs numériques qui interviennent dans les expressions) à des fonctions définies sur un autre intervalle que $[0, \pi]$, ainsi qu'à des fonctions de plusieurs variables. Fourier a d'ailleurs utilisé ces outils pour représenter le champ de température $T(x, y, z)$ dans un solide.

La représentation de Fourier se généralise aussi à des fonctions définies sur tout l'ensemble des nombres réels. Dans ce cas, elle prend la forme d'une intégrale, et non d'une somme discrète, et on la dénomme transformée de Fourier.

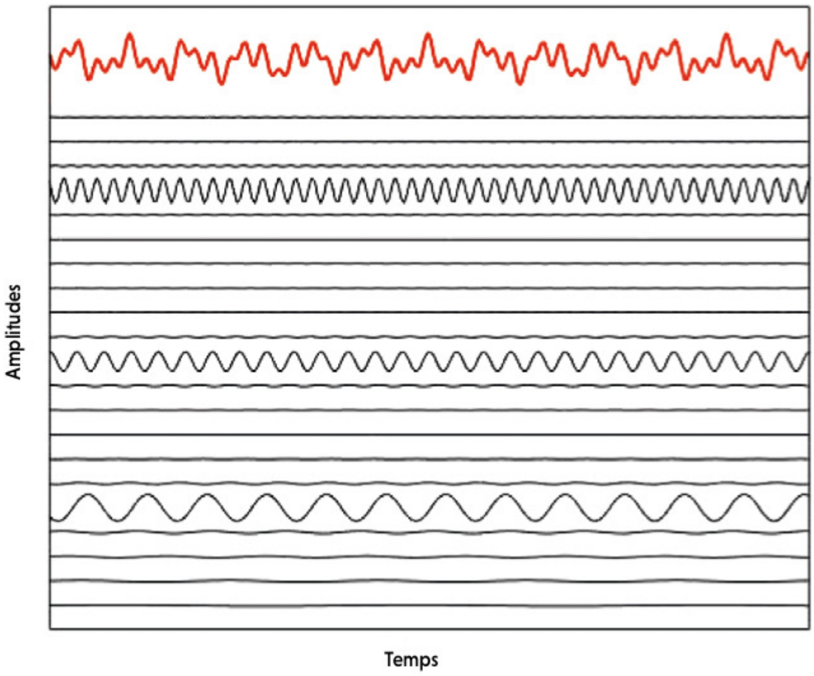
UNE THÉORIE RENDUE RIGOUREUSE TARDIVEMENT

Fourier affirmait sans preuves valables que la représentation par des sinusoïdes et les formules correspondantes s'appliquaient à des fonctions quelconques. Il faut dire qu'au début du XIXe siècle, de nombreux concepts de l'analyse mathématique, tels que la notion de fonction ou celle de limite, n'avaient pas de définitions suffisamment précises pour que l'on puisse fournir des démonstrations rigoureuses.

Une bonne partie des développements de l'analyse jusque dans les années 1960 auront pour objectif de préciser dans quelles conditions et dans quel sens la série de Fourier d'une fonction f, calculée à partir des formules de Fourier, peut représenter cette fonction f. En effet, la somme d'une infinité de nombres n'a de sens que si elle converge, c'est-à-dire si la somme des n premiers termes tend vers une limite finie quand n tend vers l'infini. Or le théorème de Carleson, qui prouve rigoureusement que la série de Fourier d'une fonction $f(x)$ de carré intégrable (c'est-à-dire une fonction f dont l'intégrale de f^2 existe et donne un résultat fini) converge pour presque tout x vers $f(x)$, ne date que de 1966.

Pourquoi la représentation d'une fonction par une série de Fourier est-elle si utile ? Tout d'abord, elle montre qu'on peut reconstruire une fonction quelconque (mais suffisamment régulière) définie sur un intervalle borné à partir d'un objet beaucoup plus simple, à savoir la suite discrète de ses coefficients de Fourier.

Ensuite, on démontre que ces coefficients a_k tendent rapidement vers zéro quand >



Le tracé en rouge représente une fonction périodique. Sa décomposition de Fourier *(tracés noirs)* montre qu'elle est principalement constituée de la somme de trois oscillations sinusoïdales. Les autres oscillations sinusoïdales qui composent le signal sont de faible amplitude et négligeables : on peut donc représenter avec une très bonne précision la fonction périodique en question à l'aide de seulement trois coefficients de Fourier (et des trois fréquences des oscillations correspondantes).

Patrick Flandrin

> k tend vers l'infini ; il s'ensuit qu'on peut ne garder qu'un nombre fini, disons les n premiers coefficients, pour reconstruire la fonction avec peu d'erreur. En effet, le reste de la série de Fourier, c'est-à-dire la somme de tous les termes négligés $a_k \sin(kx)$, d'indices supérieurs à n, tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Autrement dit, on peut représenter avec une bonne approximation toute fonction par un nombre fini de coefficients de Fourier. En termes modernes, cela signifie que l'on peut « numériser » efficacement la fonction, qui est alors représentée par un ensemble fini de nombres.

Ainsi, on peut représenter avec une bonne approximation un signal temporel $f(t)$ sur une durée finie par la somme d'un nombre fini de signaux sinusoïdaux de la forme $a_k \sin(\alpha k t)$ où k est un entier positif et α une constante qui dépend de la durée sur laquelle le signal est défini. Cela correspond à une décomposition du signal en ses principales fréquences (la fonction $\sin(\alpha k t)$ a une fréquence $\alpha k/(2\pi)$) (*voir la figure page 57*). L'ensemble des fréquences représentées dans la série de Fourier de la fonction $f(t)$ définit ce qu'on appelle le spectre de f, par analogie avec le spectre de la lumière blanche, qu'un prisme décompose en composantes colorées, de fréquence bien déterminée (*voir la figure page 55*).

RÉSOUDRE DES ÉQUATIONS, RETOUCHER DES IMAGES...

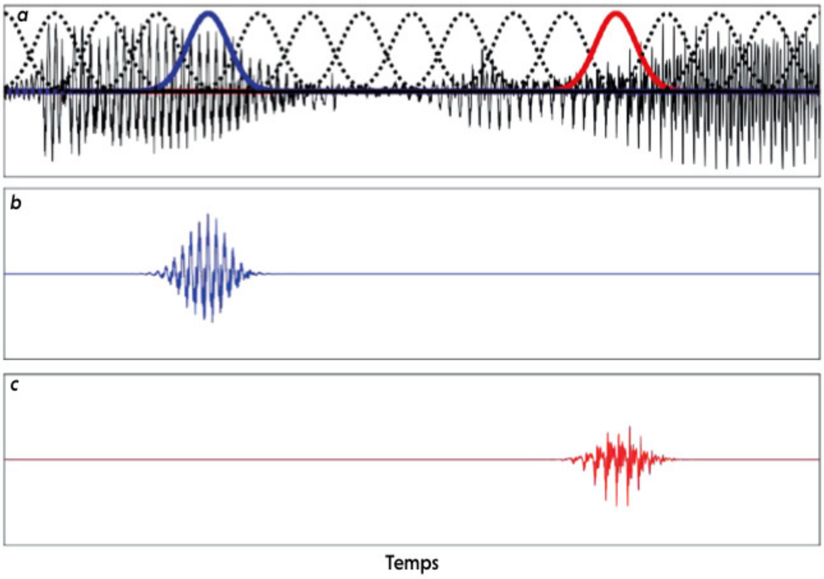
Comme nous l'avons vu sur un exemple, la représentation en sommes de sinus (ou de cosinus, ou, de façon plus générale, d'exponentielles complexes, de la forme $e^{iax} = \cos ax + i \sin ax$ où i est le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$) permet de résoudre, dans toutes sortes de cas que Fourier a détaillés dans son traité, non seulement l'équation de la chaleur, mais aussi les principales équations linéaires de la physique.

La méthode de Fourier, souvent très efficace, trouve régulièrement de nouvelles applications. Par exemple, en 2003, Patrick Pérez, Michel Gangnet et Andrew Blake, alors chercheurs chez Microsoft au Royaume-Uni, ont proposé une méthode, nommée édition de Poisson, pour pratiquer le copier-coller d'une image dans une autre. Elle est aujourd'hui mise en œuvre dans tous les logiciels de retouche d'images.

Les trois chercheurs partaient de l'observation que l'on ne peut pas juste copier-coller brutalement un morceau d'une image I_1 dans une autre image I_2 : en effet, le bord de la zone copiée se détecterait immédiatement, car les couleurs de l'image cible I_2 et du morceau collé extrait de I_1 sont généralement différentes. Pour faire une retouche « sans couture », l'idée est de fusionner non pas les deux images, mais leurs gradients, en créant un champ de vecteurs V qui est égal au gradient de la première image I_1 sur la zone à coller et au gradient de l'image cible I_2 ailleurs. Rappelons que le gradient d'une fonction $f(x, y)$, qui décrit l'image, est le champ de vecteurs du plan dont les composantes sont la dérivée $\partial f/\partial x$ de f selon la coordonnée x et la dérivée $\partial f/\partial y$ selon la coordonnée y. Or on montre que reconstruire une image f dont le gradient soit aussi proche que possible du champ V revient à résoudre une équation de Poisson, ce que des algorithmes fondés sur la méthode de Fourier effectuent très rapidement.

En fait, dès le XIXe siècle, la résolution de nombreux problèmes, notamment les prévisions astronomiques, s'est effectuée par la méthode de Fourier, en calculant des coefficients d'une série de Fourier. Ce faisant, des méthodes rapides pour effectuer ces calculs seront redécouvertes plusieurs fois. Elles anticipaient l'invention en 1965 par les Américains James Cooley et John Tukey de la transformation de Fourier rapide ou FFT, pour « Fast Fourier Transform » (*voir l'encadré page 56*).

À la fin des années 1940, l'apparition des premiers ordinateurs a fait naître une nouvelle discipline, le traitement du signal, qui utilise la numérisation des sons et des images pour leur faire subir des transformations visant à en améliorer la qualité (par exemple en enlevant des bruits parasites) ou à les transmettre efficacement. Les méthodes de l'analyse de Fourier y ont très vite rencontré un immense succès, dû au fait que la plupart des signaux et images sont



Dans les analyses de Fourier locales, le signal est découpé en courts segments sur lesquels les caractéristiques spectrales sont considérées comme homogènes. Pour ce faire, on utilise une fenêtre « douce » qui glisse sur le signal et prélève sur celui-ci des segments pondérés et partiellement recouvrants. Ainsi, pour effectuer une analyse du signal représenté en *a*, on peut envisager un ensemble de fenêtres locales telles celles représentées en pointillés, dont chacune permet d'isoler une partie du signal (*b* et *c*). L'analyse de Fourier est ensuite appliquée à chacun des fragments de signal ainsi isolés.

Patrick Flandrin

représentés de façon économique par une série de Fourier. En effet, la transmission d'un petit nombre de coefficients suffit pour reconstituer le signal avec une grande précision; de plus, les bruits parasites correspondent souvent, dans la série de Fourier, à des termes dont les coefficients ont une faible valeur, et il est donc plus facile de les éliminer en utilisant la représentation de Fourier.

Cependant, si l'on s'en tient à sa formulation initiale, la représentation de Fourier souffre de limitations dans bon nombre de situations. Une représentation en termes de fonctions sinusoïdales est *a priori* bien adaptée pour décrire un signal présentant des oscillations permanentes. Mais dans des cas moins « stationnaires » (signaux transitoires, modulations de fréquence, etc.), la description qu'elle offre peut s'écarter sensiblement du signal réel.

Si l'on s'en réfère à une analogie musicale, on peut voir un mode de Fourier (c'est-à-dire une oscillation sinusoïdale) comme une note de musique dont la hauteur correspond à la fréquence de ce mode. Ce point de vue se heurte cependant au fait qu'un tel mode est par définition éternel alors que, dans tout morceau de musique, les notes que l'on entend sont localisées dans le temps.

DÉCOUPER LE SIGNAL EN COURTS SEGMENTS TEMPORELS

Dépasser cette limitation a fait l'objet de nombreux travaux depuis les années 1940. On a ainsi cherché à mettre au point une analyse de Fourier « locale » qui réaliserait mathématiquement ce qu'on lit sur une portée musicale. En d'autres termes, il s'agissait d'obtenir une « représentation temps-fréquence », permettant de lire, pour chaque intervalle de temps donné, les fréquences représentatives du signal.

La solution la plus simple consiste à découper le signal en courts segments temporels successifs et à appliquer une analyse de Fourier classique sur chacun d'eux (*voir l'encadré ci-contre*). Cependant, une découpe simple, mais brutale, du signal en segments adjacents crée parfois des artefacts. Afin de les limiter, une meilleure analyse de Fourier locale fait usage de fenêtres qui sont à la fois pondérées et partiellement recouvrantes (*voir la figure page précédente*).

On obtient ainsi une représentation régulière et d'interprétation visuelle aisée. Mais elle n'est pas totalement satisfaisante sur le plan de l'efficacité algorithmique, car elle est redondante: les spectres calculés sur chaque fenêtre ne sont pas indépendants. Le codage de l'information n'est donc pas optimal et l'inversion de la transformation, qui permet de reconstituer le signal à partir de sa représentation de Fourier, est rendue plus difficile.

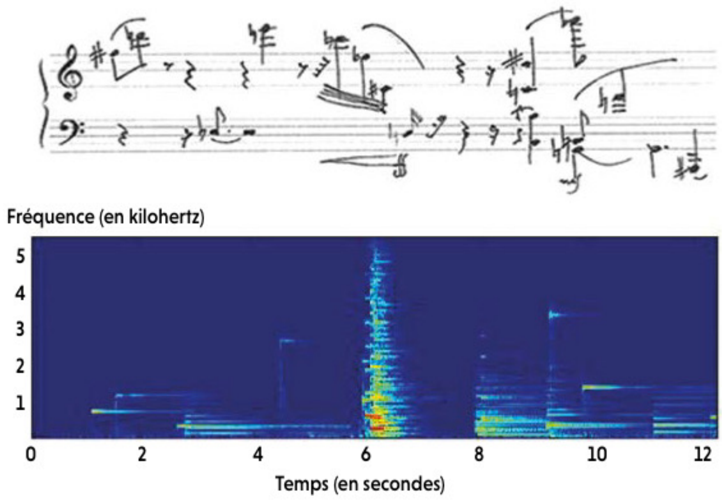
Plusieurs pistes ont été suivies pour pallier ces difficultés et trouver de véritables bases temps-fréquence orthonormées (des familles de fonctions indépendantes permettant une description du signal sans perte d'information ni redondance) pouvant être associées à des algorithmes rapides d'analyse et de synthèse.

L'existence de telles bases a longtemps été tenue pour impossible, car elle semblait contredire certains résultats théoriques en physique mathématique. Ce n'est qu'au début des années 1990 qu'ont été développées des méthodes satisfaisantes telles que la MDCT (pour *Modified Discrete Cosine Transform*), aujourd'hui largement utilisée pour les formats de compression audionumérique (MP3, MPEG2-AAC).

Les « bases de Wilson » en sont une variante. Inspirées d'une idée du physicien américain Kenneth Wilson (lauréat du prix Nobel en 1982), les bases de Wilson ont >

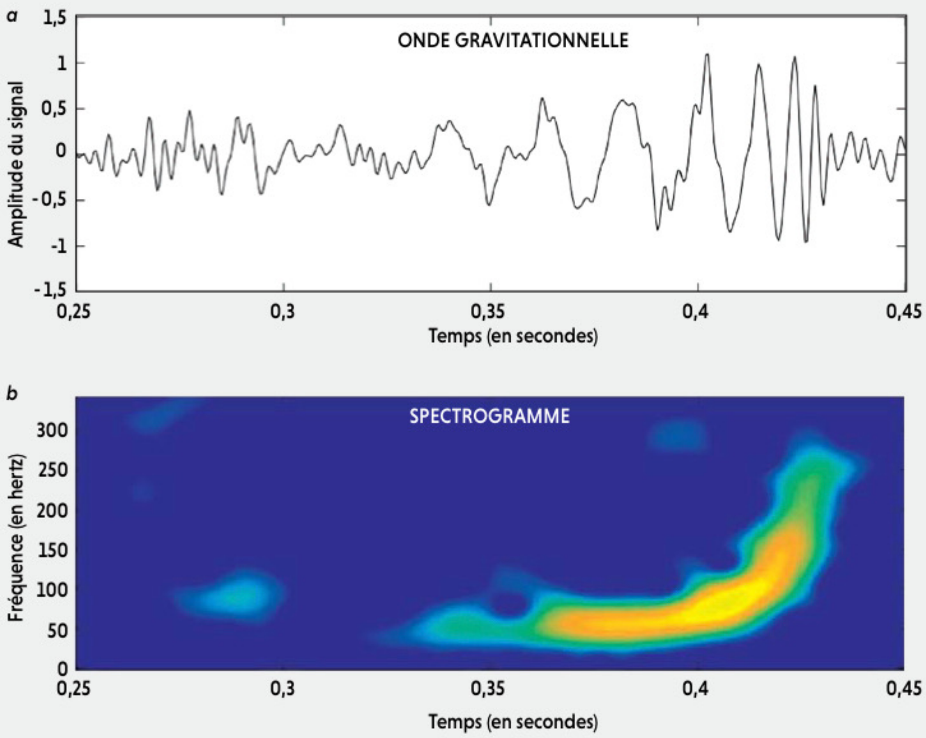
REPRÉSENTATION TEMPS-FRÉQUENCE

Dans sa version de base, l'analyse de Fourier représente un signal temporel $f(t)$ par un spectre fréquentiel qui ne dépend pas du temps : les modes de Fourier – les fonctions sinusoïdales comme $a_n \sin(nt)$ – sont supposés établis de façon permanente, avec des poids a_n constants. Afin de rendre l'analyse évolutive et plus fine, on peut segmenter le signal en courts intervalles de temps successifs et appliquer l'analyse de Fourier sur chacun de ces intervalles. On parle alors de « transformée de Fourier à court terme » et la représentation dite temps-fréquence qui en résulte est l'analogue de l'écriture d'un morceau musical sur une portée *(voir la figure)* : pour chaque intervalle de temps, on obtient un ensemble de fréquences (les notes en musique) représentatives du signal.



Un peu comme les portées d'une partition musicale *(en haut)*, une analyse de Fourier à court terme du morceau de musique représente celui-ci sur un diagramme temps-fréquence *(en bas)*. L'intensité étant codée par la couleur *(du bleu foncé pour les faibles valeurs au rouge pour les plus grandes)*, cette représentation permet d'identifier les notes par leur hauteur, l'instant de leur occurrence et leur poids énergétique.

Patrick Flandrin



La première détection directe d'une onde gravitationnelle a été réalisée en 2015 par le dispositif interférométrique *Ligo*, aux États-Unis. Elle a nécessité une analyse efficace du signal. Cette analyse est effectuée par une décomposition de Fourier locale avec des fenêtres « douces » *(voir la figure page 58)*, le signal de chaque fenêtre étant décomposé sur une base de Wilson (une famille particulière de fonctions).
Le signal brut *(a)* qu'a recueilli l'interféromètre est constitué d'une bouffée bruitée d'oscillations dont la fréquence s'accélère au fil du temps. Sa représentation temps-fréquence *(b)* montre que l'énergie du signal (codée par la couleur) se concentre sur une trajectoire relativement bien définie dans le plan temps-fréquence.
En ne retenant dans cette représentation que les composantes dominantes, il est possible de débruiter le signal *(c, courbe rouge)*, qui correspond alors remarquablement bien au calcul théorique d'un signal gravitationnel dû à la coalescence de deux trous noirs *(c, courbe noire)*.

Patrick Flandrin, d'après données de la collaboration LIGO_Virgo (https://www.gw-openscience.org/events/GW150914/)

> récemment joué un rôle clé dans la première détection directe d'une onde gravitationnelle, en 2015 (*voir la figure pages 60 et 61*).

DÉTECTION D'ONDES GRAVITATIONNELLES

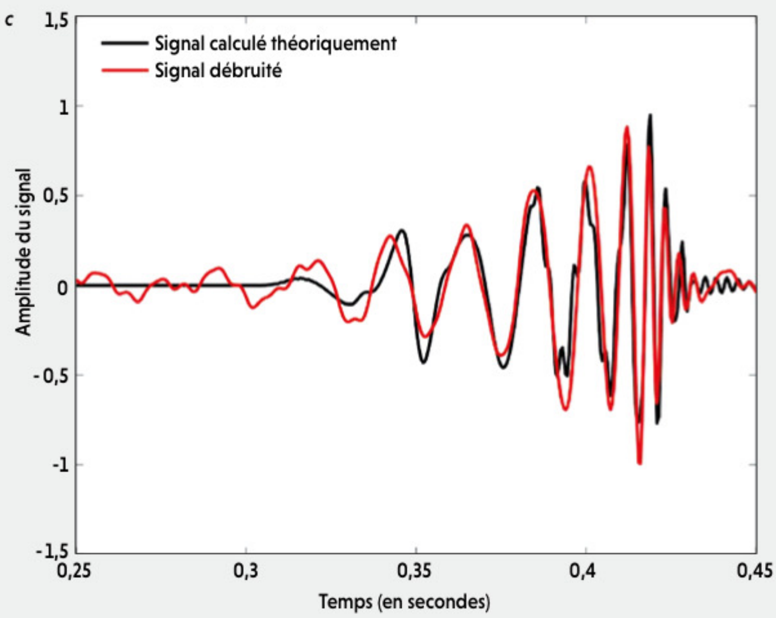
L'exemple de la détection des ondes gravitationnelles est emblématique de la capacité d'une description temps-fréquence à mettre en évidence, en présence de bruit, un signal transitoire de type *chirp*. Ce terme, qui signifie « pépiement » en anglais, désigne un signal transitoire de la forme $a(t) \sin b(t)$ où les variations de l'amplitude $a(t)$ sont lentes par rapport aux oscillations décrites par le terme $\sin b(t)$. Avec une représentation temps-fréquence par une base de fonctions orthonormées, le gros de l'énergie d'un tel signal transitoire correspond à quelques coefficients forts, tandis que d'éventuels bruits parasites se répercutent sur de petits coefficients, répartis sur l'ensemble du plan temps-fréquence.

La détection directe d'une onde gravitationnelle est effectuée par une interférométrie optique très sensible, mise en œuvre dans les immenses dispositifs de la collaboration *LIGO-Virgo*, dont les concepteurs ont reçu le prix Nobel de physique en 2017. En effet, avec un interféromètre suffisamment grand, le passage d'une onde gravitationnelle se traduit par une légère modification de la longueur d'un des deux bras du dispositif par rapport à l'autre. Le système des franges d'interférence observées oscille donc. Dans le cas de la première détection, survenue le 14 septembre 2015, la source d'ondes gravitationnelles était l'effondrement d'un système de deux trous noirs en rotation l'un autour de l'autre. Cette rotation s'accélère lors de la phase ultime précédant la coalescence des deux astres, avec pour conséquence une augmentation de la fréquence de l'oscillation des franges d'interférence. Le signal mesuré a alors une structure de *chirp*.

La représentation temps-fréquence d'un tel *chirp* est dite parcimonieuse, au sens où elle n'est constituée que d'un petit nombre de coefficients significatifs, ses contributions principales s'organisant le long de la trajectoire d'évolution de la fréquence. La théorie prédit que cette fréquence se comporte en première approximation comme $t^{-3/8}$, où t est le temps. Cela facilite l'identification du signal et son débruitage, et le résultat se compare remarquablement bien avec la prédiction de la théorie de la relativité générale (*voir la figure ci-dessus*).

DES ONDELETTES POUR FENÊTRES VARIABLES

L'analyse temps-fréquence est cependant limitée par l'utilisation d'une fenêtre de largeur fixe. Elle n'est donc pas adaptée aux signaux ou images dépourvus d'échelle caractéristique, qui présentent des détails à toutes les échelles.



C'est typiquement le cas des images naturelles, en raison de l'effet de perspective.

Il en est de même pour certains signaux sismiques utilisés en prospection pétrolière. La technique de « sismique réflexion » consiste à produire une vibration à la surface du sol, qui se propage dans le sous-sol tout en étant réfléchie par les multiples couches qui le composent. Les géophysiciens cherchaient à déduire des informations sur la nature de ces couches, et notamment la présence éventuelle de pétrole, à partir d'une analyse du signal réfléchi. Or pour de tels signaux, l'analyse temps-fréquence se révélait inefficace : elle ne permettait pas d'analyser les détails du signal plus petits que la largeur de la fenêtre.

Les ondelettes ont connu un succès très rapide en traitement du signal et des images

Dans les années 1980, le géophysicien français Jean Morlet a ainsi été conduit à abandonner l'analyse temps-fréquence pour introduire l'analyse par « ondelettes ». Il s'agit de décomposer le signal sous la forme d'une somme de versions translatées et dilatées d'une seule fonction oscillante et bien localisée, à choisir de façon appropriée.

En collaboration avec le physicien théoricien Alex Grossmann, Jean Morlet introduisit la première variante d'une décomposition en ondelettes. Il s'agissait d'une transformation qui décompose un signal $f(t)$ en termes de toutes les translatées-dilatées d'une certaine ondelette $\psi(t)$, c'est-à-dire de toutes les fonctions de la forme $\psi((t-b)/a)$, où a, le paramètre de dilatation, prend toutes les valeurs positives et b, le paramètre de translation, prend toutes les valeurs réelles.

DES BASES D'ONDELETTES SANS REDONDANCE

Cependant, ce système de représentation était très redondant et donc peu efficace. C'est ici qu'intervint Yves Meyer. En 1986, ce mathématicien français (lauréat du prix Gauss en 2010 et du prix Abel en 2017) montra que, pour certains choix de l'ondelette ψ, une famille de translatées-dilatées particulières conduit à une base de fonctions orthonormées, qui permettent donc de représenter le signal sans redondance.

Les progrès se sont alors enchaînés rapidement. Stéphane Mallat, aujourd'hui professeur au Collège de France, établit le lien avec des algorithmes de décomposition utilisés en analyse d'images, et introduisit les algorithmes de décomposition rapides, indispensables pour les applications techniques. En 1988, Ingrid Daubechies, physicienne et mathématicienne d'origine belge, construisit des ondelettes à support compact (c'est-à-dire des fonctions nulles en dehors d'un intervalle de taille finie), qui autorisent une meilleure efficacité algorithmique. Le standard de compression professionnel des photographies de haute définition utilisé aujourd'hui, JPEG 2000, est fondé sur des décompositions de ce type (*voir la figure page 62*).

Les décompositions en ondelettes ont connu un succès très rapide en traitement du signal et des images. En effet, pour de vastes classes de signaux, elles donnent lieu à des décompositions parcimonieuses, où ne figurent qu'un petit nombre de coefficients. De telles représentations rendent possible une très forte compression des données, sans réelle perte d'information. Cette propriété est importante non seulement pour transmettre rapidement et efficacement des données, mais aussi pour éliminer les bruits parasites : un algorithme performant consiste simplement à >

JPEG

JPEG2000

La norme JPEG de compression d'images, créée en 1992 par le collectif d'experts nommé Joint Photographic Experts Group, est d'un usage très répandu. Elle utilise une représentation des images à base de fonctions cosinus (DCT, pour *Discrete Cosine Transform*). En 2000, a été proposée la norme JPEG 2000, qui utilise une compression à base d'ondelettes. Comme le montrent ces images (décompressées), la compression JPEG 2000 offre une qualité bien meilleure que la norme JPEG initiale, pour une même taille de fichier.

annuler les plus petits coefficients dans la décomposition du signal en ondelettes. La théorie statistique qui justifie et développe cela a été mise au point par David Donoho (lauréat du prix Gauss en 2018), de l'université Stanford, et ses collègues.

De façon générale, les développements de l'analyse de Fourier sont au cœur de l'actualité scientifique et technique. Ils interviennent partout dans le traitement de données vocales ou musicales, où la séparation des sources et leur caractérisation s'appuient sur l'identification de motifs spectraux et de leurs occurrences au fil du temps.

En ingénierie biomédicale, la détection de signatures temps-fréquence caractéristiques dans des enregistrements de signaux ou d'images dans différentes modalités (électroencéphalographie, électrocardiographie, magnétoencéphalographie...) peut être associée à diverses pathologies.

UNE APPROCHE QUI NE CESSE DE SE RENOUVELER

Plus fondamentalement, l'une des techniques d'apprentissage profond les plus récentes, la « transformée de scattering », développée par Stéphane Mallat et ses collègues, peut être interprétée comme une variante des techniques des réseaux de neurones profonds, où l'on calcule des itérées de la transformée en ondelettes. Elle et ses variantes ouvrent la voie à de nouveaux algorithmes de classification de sons ou d'images.

On peut noter enfin que la théorie récente de l'« acquisition comprimée », ou *compressed sensing* en anglais, introduite par Emmanuel Candès, Justin Romberg, Terence Tao et David Donoho, parvient à exploiter le fait qu'un signal ayant une représentation parcimonieuse dans une base bien choisie (ce qui est le cas avec les ondelettes pour la plupart des données naturelles) peut être acquis au moyen d'un très petit nombre d'échantillons. Cette théorie trouve actuellement des applications importantes en imagerie médicale: on a ainsi pu réduire de façon spectaculaire le temps nécessaire pour effectuer une IRM.

Ainsi, l'approche proposée par Fourier ne cesse de se renouveler sans rien perdre de ses principes fondateurs. Deux siècles plus tard, elle reste d'une étonnante actualité. ■

BIBLIOGRAPHIE

E. Chassande-Mottin *et al.*, **Des ondelettes pour détecter les ondes gravitationnelles,** *Gazette des Mathématiciens*, n° 148, pp. 61-64, mars 2016.

T. Butz, **Fourier Transformation for Pedestrians,** Springer, 2e édition, 2015.

B. B. Hubbard, **Ondes et ondelettes - La saga d'un outil mathématique,** *Pour la Science*, 1995.

Y. Meyer *et al.*, **L'analyse par ondelettes,** *Pour la Science*, septembre 1987, pp. 28-37.